BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 378

TRATADOS

II

SOBRE LAS LÍNEAS ESPIRALES - SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS FIGURAS PLANAS - ARENARIO - CUADRATURA DE LA PARÁBOLA - SOBRE LOS CUERPOS FLOTANTES - STOMACHION - MÉTODO - LIBRO DE LOS LEMAS - PROBLEMA DE LOS BUEYES - FRAGMENTOS

INTRODUCCIONES, TRADUCCIÓN Y NOTAS DE

PALOMA ORTIZ GARCÍA



EDITORIAL GREDOS

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B.C.G., la traducción de este volumen ha sido revisada por M.ª LUISA PUERTAS CASTAÑOS.

López de Hoyos, 141, 28002 Madrid.
www.rbalibros.com

Depósito legal: M-18.797-2009.

ISBN: 978-84-249-3596-2.
Impreso en España. Printed in Spain.
Impreso en Top Printer Plus.

SOBRE LAS LÍNEAS ESPIRALES

INTRODUCCIÓN

El tratado *Sobre las líneas espirales* es uno de los que conservan el dialecto dórico materno de su autor, y este hecho ha sido a veces interpretado como indicio de que la obra obtuvo menos difusión en la Antigüedad tardía y en los primeros siglos del Imperio Bizantino. En efecto, Eutocio no llegó a conocerlo, pues cuando afirma que Arquímedes había descubierto «una recta igual a la circunferencia dada de un círculo»[1] aduce como fuente la *Vida de Arquímedes* escrita por Heraclidas y perdida para nosotros. Tal vez fue precisamente esa menor difusión la que permitió que el tratado conservara su forma lingüística original, al revés de lo que les ocurrió a los tratados de mayor éxito —*Sobre la esfera y el cilindro* y la *Medida del círculo*, principalmente— que fueron vertidos al dialecto común *(koinè diálektos)* generalizado como lengua literaria desde época alejandrina.

El tratado va precedido de una carta, dirigida al estudioso alejandrino Dosíteo, que es un testimonio de suma importancia para la datación de las obras de Arquímedes: de acuerdo con los datos que nos proporciona, antes de enviar a Dosíteo este trabajo ya le había mandado los enunciados y soluciones de la medida de la superficie y el volumen de la esfera —es decir, ya había compuesto el libro *Sobre la esfera y el cilindro*— y también le

[1] Heiberg, ed. cit., III 228, 20-26.

había enviado sus hipótesis sobre el volumen del segmento del paraboloide y de la proporción que guardan dos segmentos cortados del mismo paraboloide, si bien de esto último aún no le había remitido las demostraciones.

Pero el escrito que le remite ahora contiene «un género distinto de problemas, que nada tienen en común con los que acabo de mencionar» —dice—; se ocupa de la definición y propiedades de la curva que hoy recibe el nombre de «espiral de Arquímedes», con el objetivo, como solía ser en los trabajos geométricos griegos, de obtener su cuadratura. Y es que la espiral de Arquímedes es una curva de su invención, de generación mecánica, producida por un punto que se desplaza a velocidad uniforme («que se desplaza uniformemente», dice Arquímedes) por una semirrecta, uno de cuyos extremos permanece fijo mientras la semirrecta se desplaza, también a velocidad uniforme, en sentido circular[2].

Los principales resultados obtenidos, que Arquímedes, como suele, anticipa en la carta, son los siguientes:

—El área comprendida por la espiral y la semirrecta tras recorrer el primer giro completo es la tercera parte del círculo descrito con centro en el origen de la espiral y teniendo por radio el segmento recorrido por el punto en ese primer giro[3].

—La longitud del segmento perpendicular a la semirrecta principio del giro, prolongado hasta que corte a la tangente de

[2] Para situar un poco mejor esta curva, recordemos que Papo (*Collectio Mathematica* IV 270-272) distingue tres clases de problemas geométricos: los problemas «planos» (*epípeda*), que pueden resolverse mediante rectas y círculos, los «sólidos» (*stereá*), que requieren para su solución el uso de superficies de figuras sólidas, especialmente el cono, y los «lineales» (*grammiká*), en los que se asumen para la construcción otras líneas curvas cuyo origen es más complicado y menos natural, dado que se generan a partir de superficies más irregulares y movimientos más complicados. Entre las curvas de la clase lineal incluye Papo la espiral junto con la cuadratriz, la concoide y la cisoide.

[3] Prop. 24.

la espiral en el punto último del primer giro es igual a la circunferencia del círculo descrito con centro en el origen de la espiral y teniendo por radio el segmento recorrido en ese primer giro por el punto que se va desplazando[4].

—El área añadida en el tercer giro de la espiral es el doble del área comprendida por la espiral en el segundo giro; el de la cuarta, el triple, y así, sucesivamente, el área añadida en un giro n de la espiral es el múltiplo n-1 del área añadida en el segundo giro. Y el área comprendida en el primer giro es la sexta parte del área añadida en el segundo giro[5].

—Si se toman segmentos consecutivos de la espiral descrita en su primer giro (s_1, S_2) y se trazan dos círculos (c_1, C_2) con centro en el origen de la espiral y radio las rectas que delimitan los segmentos (r_1, R_2), las áreas resultantes de restar a los sectores circulares las correspondientes áreas de los segmentos de espiral (a_1, A_2) cumplen que

$$A_2 : a_1 :: \langle r_1 + [2/3\,(R_2 - r_1)]\rangle : \langle r_1 + [1/3\,(R_2 - r_1)]$$ [6].

Las demostraciones de esos enunciados van precedidas, siguiendo, de nuevo, la costumbre de Arquímedes, de once proposiciones de carácter auxiliar. Las dos primeras son teoremas relativos a la recta por la que se desplaza un punto de manera uniforme: en la primera demuestra la proporcionalidad existente entre los segmentos recorridos por el punto que se desplaza y los tiempos empleados en recorrerlos; la segunda, que si dos puntos van recorriendo una línea cada uno con movimiento uniforme, y en cada línea se toman dos segmentos, si los primeros segmentos son recorridos en el mismo tiempo que los segundos, los segmentos tomados guardarán la misma razón. Las proposiciones 3 a 9 tienen carácter de problemas —es decir, demuestran la posibilidad de llevar a cabo determinadas cons-

[4] Prop. 18.

[5] Prop. 27.

[6] Prop. 28.

trucciones— y versan sobre los segmentos cortados por los círculos y sus tangentes en otros segmentos dados, y tienen en común estar resueltos mediante construcciones de *neûsis*[7]. Cierran la primera parte del tratado dos teoremas (props. 10 y 11) sobre las progresiones por diferencia.

La segunda parte del tratado se abre con siete definiciones relativas a la generación y las partes de la espiral, y les siguen diecisiete proposiciones más en las que estudia las propiedades de las tangentes a la espiral y mide la longitud de los giros de la espiral comparándolos con los círculos que los comprenden (props. 12-20) y, por último, mide el área de la curva en sus giros sucesivos y el área del segmento de espiral (props. 21-28).

Este tratado es el primer estudio a fondo sobre tangentes a una curva diferente del círculo: en todos los textos griegos conocidos, una curva plana es el límite o parte del límite entre dos regiones del plano, una de las cuales —la figura propiamente dicha— sólo puede contener segmentos de rectas, y no rectas ilimitadas. Una tangente a una curva es, por tanto, una recta ilimitada siempre exterior a la figura. Esa concepción exige que se establezca la existencia de la tangente y su unicidad. Esta segunda parte consiste en demostrar que toda otra recta que pase por el punto de contacto penetra en la figura. Así actúan Euclides, Apolonio y Arquímedes, los tres matemáticos que se ocuparon de estas cuestiones —para los casos, respectivamente, del círculo, las cónicas y la espiral.

Arquímedes no desvela el análisis que le permitió encontrar la tangente a su espiral, pero la elegancia de las síntesis de sus razonamientos en esta obra ha alcanzado los elogios generalizados de los comentaristas.

[7] *Vid.* vol. I, INTRODUCCIÓN, págs. 41-42 y la bibliografía mencionada allí.

Arquímedes a Dosíteo, ¡salud! II 2

De los teoremas que envié a Conón, respecto a los cuales me encargas constantemente que te escriba las demostraciones, la mayoría las tienes escritas en lo que te llevó Heraclidas y algunas otras te las escribo y envío en este libro.

No te extrañes si dejo pasar mucho tiempo antes de publicar las demostraciones. Ocurre que esto ha tenido lugar porque yo quería primero entregarlas a los que se dedican a las matemáticas y prefieren hacer la investigación. ¡Cuántos de los teoremas geométricos que al principio parecen de difícil acceso reciben con el tiempo su resolución! Conón concluyó su vida sin haber tenido tiempo bastante para esta investigación. De otro modo, tras resolver todas estas cuestiones y haber propuesto muchas otras, las habría puesto en claro y habría hecho avanzar muchísimo la geometría. Sé que tenía una inteligencia poco corriente para las matemáticas y una excelente afición al estudio. Pero habiendo transcurrido muchos años tras la muerte de Conón, no tengo noticia de que nadie haya logrado ningún avance en ninguno de los problemas.

Yo, por mi parte, quiero proponerlos uno por uno, porque resulta que añadí a la lista dos problemas de los que yo aún no había determinado completamente la solución, para que los que andan diciendo que lo descubren todo pero no dan a conocer ninguna demostración queden refutados por haber admitido 4
que habían descubierto imposibles.

Intentaré aclarar cuáles son estos problemas y de cuáles tienes enviadas las demostraciones y de cuáles te las envío en este libro.

El primero de los problemas era: dada una esfera, hallar un área plana igual a la superficie de la esfera, que es lo primero que quedó aclarado al publicar el libro sobre la esfera; pues una vez demostrado que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera[1], es evidente que es posible hallar un área plana igual a la superficie de la esfera.

El segundo: dado un cono o un cilindro, hallar una esfera igual al cono o al cilindro[2].

El tercero: cortar una esfera dada mediante un plano de manera que sus segmentos guarden entre sí la razón indicada[3].

El cuarto: cortar una esfera dada mediante un plano de manera que los segmentos de su superficie guarden entre sí la razón que se indique[4].

El quinto: hacer que un segmento de esfera dado[5] sea semejante a un segmento de esfera dado[6].

El sexto: dados dos segmentos de la misma esfera o de otra, hallar un segmento que sea él mismo semejante a uno de los

[1] En el tratado *Sobre la esfera y el cilindro* las demostraciones relativas a la medida de la superficie y el volumen y de la esfera aparecen en ese orden (respectivamente *Sobre la esfera y el cilindro* I 33 y I 34). Pero las intuiciones que le condujeron a las demostraciones habían seguido el camino inverso, como testimonia el propio Arquímedes en *Método* 2: «Una vez visto esto, que toda esfera es el cuádruple del cono que tiene por base su círculo máximo y la altura igual al radio de la esfera, se me ocurrió que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera. Y es que mi suposición había sido que, puesto que todo círculo es igual a un triángulo que tiene por base la circunferencia del círculo y la altura igual al radio del círculo, también toda esfera es igual al cono que tiene por base la superficie de la esfera y la altura igual al radio de la esfera».

[2] *Esf. cil.* II 1.

[3] *Esf. cil.* II 4.

[4] *Esf. cil.* II 3.

[5] Un segmento dado «en volumen», hay que entender.

[6] *Esf. cil.* II 5.

segmentos pero que tenga la superficie igual a la superficie del otro segmento[7].

El séptimo: de una esfera dada cortar mediante un plano un segmento de tal manera que el segmento guarde con el cono que tenga la misma base que el segmento e igual altura la razón indicada, mayor que la de 3/2[8].

De todos los mencionados, las demostraciones te las llevó Heraclidas. Lo que se hallaba después de esto, era falso; y es: si una esfera es cortada mediante un plano en partes desiguales, el segmento mayor guardará con el menor una razón que será el cuadrado de la razón de la superficie mayor con la menor. **6**
Que esto es falso es evidente por los teoremas que había enviado antes, pues entre ellos se encuentra el siguiente: si una esfera es cortada en partes desiguales mediante un plano perpendicular a uno de los diámetros de la esfera, el segmento mayor en superficie guardará con el menor la misma razón que el segmento mayor del diámetro con el menor, y el segmento mayor de la esfera guardará con el menor una razón menor que el cuadrado de la razón que guarda la superficie mayor con la menor, pero mayor que esa razón ⟨elevada a⟩ tres medios[9].

Y de los problemas, también el que estaba puesto el último era falso, el de que si el diámetro de una esfera es cortado de manera que el cuadrado construido sobre el segmento mayor sea el triple del cuadrado construido sobre el segmento menor, y trazado un plano por el punto[10] corta a la esfera perpendicularmente al diámetro, la figura que constituye el segmento mayor de la esfera es la mayor de todos los segmentos que tienen la misma superficie. Es evidente que esto es falso por los teoremas que

[7] *Esf. cil.* II 6.

[8] *Esf. cil.* II 7.

[9] *Esf. cil.* II 8. Los términos exactos que emplea Arquímedes para «cuadrado de la razón» y «razón elevada a tres medios» son, respectivamente *diplásios lógos* (literalmente «razón duplicada») y *hēmiólios lógos* (literalmente, «razón sesquiáltera»).

[10] Por el punto «de corte en el diámetro», se entiende.

envié antes: pues está demostrado que el hemisferio es el mayor de los segmentos de esfera comprendidos por la misma superficie[11].

Después de eso, los problemas que propuse sobre el cono[12] eran los siguientes: si permaneciendo fijo el diámetro de una parábola se hace a ésta girar de modo que el diámetro sea el eje, llámese paraboloide[13] a la figura descrita por la parábola, y si un plano es tangente a la figura del paraboloide y otro plano, trazado paralelo al plano tangente, corta un segmento del paraboloide, llámese base del segmento cortado al plano que lo corta y vértice al punto en el que el otro plano es tangente al para-
8 boloide[14]. Que si la figura indicada es cortada por un plano perpendicular al eje, la sección será un círculo, es evidente[15]; pero que el segmento cortado será una vez y media el cono que tiene la misma base que el segmento e igual altura, hay que demostrarlo[16].

Y que si se cortan dos segmentos de un paraboloide mediante planos trazados de cualquier manera, las secciones serán elipses, es evidente[17]; pero que si los planos secantes no son perpendiculares al eje los segmentos guardarán entre sí la razón que guardan entre sí los cuadrados construidos sobre las rectas trazadas paralelas al eje desde los vértices hasta los planos secantes, hay que demostrarlo[18], pero las demostraciones de esto aún no te las he enviado.

[11] *Esf. cil.* II 9.

[12] Heiberg sospecha que quizá haya que sustituir «cono» por «conoide», y Heath asume esa propuesta de corrección.

[13] *Gr. orthogónion kōnoeidés*; *cf.* vol. I, INTRODUCCIÓN, pág. 48.

[14] *Con. esf.*, en la carta que precede al tratado, 248, 1-9.

[15] *Con. esf.* 11.

[16] *Con. esf.* 21.

[17] El *de cualquier manera* que emplea aquí Arquímedes no ha de ser interpretado en el sentido de «en todos los casos», pues en el enunciado de *Sobre los conoides y esferoides* 12, donde se prueba el aserto, Arquímedes precisa la condición de que el plano no pase por el eje ni sea paralelo ni perpendicular a él.

[18] *Con. esf.* 24.

Después de esto, proponía estos problemas sobre la espiral, que son un género distinto de problemas que nada tienen en común con los que acabo de mencionar, y cuyas soluciones te he escrito en este libro. Son los siguientes: si se hace girar uniformemente una línea recta, permaneciendo fijo en un plano uno de sus extremos, y se la hace llegar de nuevo a la posición de la que partió y, al mismo tiempo que la línea es transportada, un punto se mueve uniformemente por la recta partiendo del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.

Afirmo que el área comprendida por la espiral y la recta que se ha hecho volver a la posición de la que partió, es la tercera parte del círculo descrito con centro en el punto que permanece fijo y radio la recta recorrida por el punto en un giro de la recta[19].

Y si una recta es tangente a la espiral en el último extremo producido en la espiral y desde su extremo fijo[20] se traza otra recta perpendicular a la línea que se ha hecho girar y volver a su posición inicial, de modo que alcance a la tangente, afirmo que **10**
la recta trazada[21] es igual a la circunferencia del círculo[22].

Y si la recta que se hace girar y el punto que se desplaza por ella describen varios giros y vuelven de nuevo al lugar del que partieron, digo que el área añadida en el tercer giro será el doble del área comprendida por la espiral en el segundo giro; y la del cuarto, el triple; y la del quinto, el cuádruple; y, sucesivamente, las áreas añadidas en los giros posteriores serán múltiplos, según la serie de los números, del área añadida en el segundo giro; y el área comprendida en el primer giro es la sexta parte del área añadida en el segundo giro[23].

Y si en la espiral descrita en un giro se toman dos puntos, y desde ellos se trazan rectas hasta el extremo que ha permaneci-

[19] *Espir.* 24.

[20] El extremo fijo es el «de la espiral», se entiende.

[21] La recta trazada «en último lugar», se entiende.

[22] *Espir.* 18.

[23] *Espir.* 27.

do fijo de la línea que se hace girar, y con centro en el punto que ha permanecido fijo y radios las rectas trazadas hasta el extremo que ha permanecido fijo de la recta se describen dos círculos, y se prolonga la menor de las rectas trazadas, afirmo que el área comprendida por el arco del círculo mayor que está hacia el mismo lado que la espiral entre las rectas y la espiral y la recta prolongada guardará con el área comprendida por el arco del círculo menor y la propia espiral y la recta que une los extremos de éstos[24] la razón que guarda el radio del círculo menor más dos tercios del exceso en que excede el radio del círculo
12 mayor al radio del círculo menor con el radio del círculo menor más un tercio del exceso mencionado[25].

Las demostraciones de estas y otras cuestiones sobre la espiral están escritas en este libro, y las precede, como en las demás obras de geometría, lo que es de necesidad para su demostración.

Asumo aquí también el siguiente postulado de los que figuran en los libros publicados anteriormente: en las líneas desiguales y las áreas desiguales, es posible que el exceso en que excede la mayor a la menor, sumado repetidamente a sí mismo, exceda a cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón[26].

Proposición 1

Si un punto moviéndose se desplaza uniformemente por una línea[27] *y en ella se toman dos líneas, las líneas tomadas guardarán entre sí la misma razón que los tiempos en los que el punto las recorrió.*

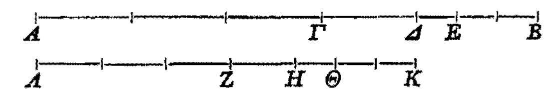
[24] «Éstos» se refiere a los arcos de circunferencia y espiral en cuestión.

[25] *Espir.* 28.

[26] El postulado figura, con ligeras variaciones, en *Esf. y cil.* I, post. 5 (*vid.* también nota al pasaje) y en la carta que antecede a *Cuadratura de la parábola* (264, 9-12).

[27] «Una línea recta», entiéndase.

Desplácese un punto uniformemente por la línea AB, y tómense en ella dos líneas ΓΔ, ΔE y sea ZH el tiempo en el que el punto recorrió ΓΔ y sea HΘ en el que recorrió ΔE.



Se ha de demostrar que la línea ΓΔ guarda con la línea ΔE la misma razón que el tiempo ZH con el HΘ.

Compónganse las líneas AΔ, ΔB de las líneas ΓΔ, ΔE en cualquier composición de tal manera que AΔ exceda a ΔB y que cuantas veces forma parte la línea ΓΔ de la AB, otras tantas forme parte el tiempo ZH del tiempo ΛH y que cuantas veces forma parte la línea ΔE de la ΔB, otras tantas forme parte el tiempo ΘH del tiempo KH.

Dado que se ha supuesto que el punto se ha desplazado uni- 14
formemente por la línea AB, es evidente que en cuanto tiempo ha recorrido ΓΔ, en otro tanto ha recorrido cada una de las líneas iguales a ΓΔ. Está claro también que la línea compuesta AΔ ha sido recorrida en tanto tiempo cuanto es el tiempo ΛH, puesto que la línea ΓΔ está contenida tantas veces en la línea AΔ como el tiempo ZH en el tiempo ΛH. Por la misma razón también la línea BΔ ha sido recorrida en tanto tiempo cuanto es el tiempo KH. Puesto que la línea AΔ es mayor que la BΔ, es evidente que el punto recorre la línea ΔA en un tiempo mayor que la BΔ. De modo que el tiempo ΛH es mayor que el tiempo KH.

Del mismo modo se demostrará también que si de los tiempos ZH, HΘ se componen tiempos en cualquier composición de modo que el uno exceda al otro, también la línea homóloga del tiempo que sea mayor, será mayor que las líneas compuestas de las líneas ΓΔ, ΔE según la misma composición.

Es evidente por tanto que la línea ΓΔ guardará con la ΔE la misma razón que el tiempo ZH con el tiempo HΘ [*Elem.* V, def. 5].

Proposición 2

Si, habiéndose desplazado con movimiento uniforme cada uno de dos puntos por una línea —que no sea la misma—, se toman en cada una de las líneas dos líneas, de las cuales las primeras son recorridas por los puntos en tiempos iguales que las segundas, las líneas tomadas guardarán entre sí la misma razón.

Desplácese uniformemente un punto por la línea AB y otro por la línea KΛ, y tómense en la línea AB dos líneas ΓΔ, ΔE,
16 y en la KΛ ⟨otras dos⟩ ZH, HΘ, y el punto que se desplaza por la línea AB recorra la línea ΓΔ en el mismo tiempo en que el otro, transportado por KΛ, recorre ZH, e igualmente recorra el punto la línea ΔE en el mismo tiempo en que el otro ⟨recorre⟩ HΘ.

A Γ Δ E B
Λ Z H Θ K
M N Ξ

Se ha de demostrar que ΓΔ guarda con ΔE la misma razón que ZH con HΘ.

Sea MN el tiempo en que el punto ha recorrido la línea ΓΔ; en ese tiempo también el otro punto recorre ZH. De nuevo, sea NΞ el tiempo en que el punto recorrió ΔE; y en ese tiempo el otro punto recorre HΘ; por tanto la línea ΓΔ guardará con la ΔE la misma razón que el tiempo MN con el NΞ, y la línea ZH con la HΘ la misma ⟨razón⟩ que el tiempo MN con el NΞ [Prop. 1].

Luego es evidente que la línea ΓΔ guardará con la ΔE la misma razón que la ZH con la HΘ.

Proposición 3

Dados unos círculos en un número cualquiera, es posible tomar una recta que sea mayor que ⟨la suma de⟩ las circunferencias de los círculos.

Pues si se circunscribe un polígono a cada uno de los círculos, es evidente que la recta compuesta de ⟨la suma de⟩ todos los perímetros será mayor que ⟨la suma de⟩ todas las circunferencias de los círculos [*Esf. cil.* I 1].

Proposición 4

Dadas dos líneas desiguales, una recta y una circunferencia de círculo, es posible tomar una recta menor que la mayor de las líneas dadas pero mayor que la menor.

Si se suma a sí mismo el exceso en que excede la línea ma- **18**
yor a la menor cuantas veces ⟨sea menester para que⟩ exceda a la recta y se divide la recta en otras tantas partes iguales, el segmento[28] será menor que el exceso.

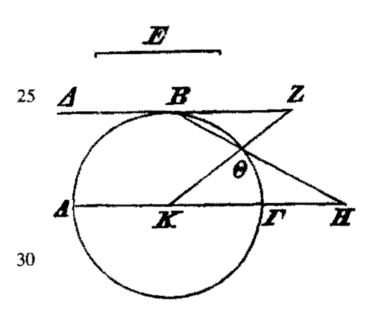
En el caso de que la circunferencia fuera mayor que la recta, añadiendo un segmento a la recta, es evidente que será mayor que la menor de las líneas dadas, pero menor que la mayor.

En el caso de que fuera menor, añadiendo un segmento a la circunferencia será, de manera semejante, mayor que la menor pero menor que la mayor, pues la línea añadida será menor que el exceso.

[28] Se refiere a cada uno de los segmentos resultantes de dividir la recta como se ha indicado.

PROPOSICIÓN 5

Dado un círculo y una recta tangente al círculo, es posible trazar desde el centro del círculo una recta hasta la tangente de manera que la recta entre la tangente y la circunferencia del círculo guarde con el radio una razón menor que ⟨la que guarda⟩ con cualquier arco de círculo dado el arco de circunferencia ⟨comprendido⟩ entre el punto de contacto y la recta trazada[29].



Sea ABΓ un círculo dado y su centro K, y sea ΔZ tangente al círculo en el punto B, y dese también un arco cualquiera de circunferencia de círculo.

Es posible tomar una recta mayor que el arco dado; y sea E la recta mayor que el arco dado. Desde el centro K trácese una recta AH paralela a ΔZ, y sea
20 HΘ igual a E y tendente a B[30]. Una vez trazada desde el centro K hasta Θ, prolónguese.

En efecto, ΘZ guarda con ΘK la misma razón que BΘ con ΘH. Por tanto ZΘ guarda con ΘK una razón menor que el arco BΘ con el arco dado, porque la recta BΘ es menor que el arco BΘ [*Esf. cil.* I, post. 1] y la recta ΘH es mayor que el arco dado [*Elem.* V 8]. Por tanto ZΘ guarda con el radio una razón menor que el arco BΘ con el arco dado.

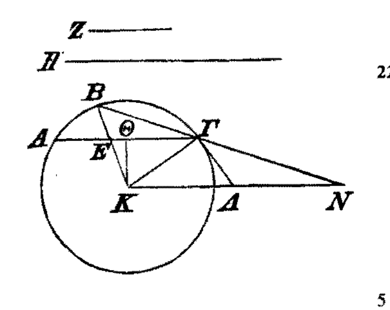
[29] El problema que se pretende resolver consiste en construir una recta que desde el centro del círculo corte a la tangente —en la ilustración, KZ— de modo que se cumpla que la razón KZ : KΘ es menor que la razón entre el arco BΘ y el arco dado —al que Arquímedes no da nombre, y del que dice sólo que es menor que el segmento E.

[30] Para estas construcciones de líneas tendentes, *cf.* en vol. I, Introducción, págs. 41 y 42 lo referente a las *neûsis*.

PROPOSICIÓN 6

Dado un círculo y en el círculo una cuerda menor que el diámetro, es posible trazar desde el centro del círculo hasta su circunferencia una recta que corte a la cuerda dada en el círculo de manera que la recta tomada entre la circunferencia y la cuerda dada en el círculo guarde la razón que se indique con la recta que une el extremo de la incidente[31] *—el extremo que está en la circunferencia— con un extremo de la cuerda dada en el círculo, si la razón dada es menor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo con la perpendicular trazada hasta ella desde el centro*[32].

Dese el círculo ABΓ y su centro K y sea dada en él una cuerda ΓA menor que el diámetro y la razón que guarda Z con H, menor que la que guarda ΓΘ con KΘ y, siendo perpendicular KΘ[33], trácese desde el centro KN paralela a AΓ, y ΓΛ perpendicular a KΓ. 22



Y los triángulos ΓΘK, ΓKΛ son semejantes [*Elem.* I 29]. Entonces ΓΘ es a ΘK como KΓ a ΓΛ [*Elem.* VI 4]. Por tanto, Z guarda con H una razón menor que KΓ con ΓΛ. Guarde KΓ con una recta mayor

[31] «La incidente» se refiere a «la recta que se ha de trazar desde el centro hasta la circunferencia cortando a la cuerda dada en el círculo».

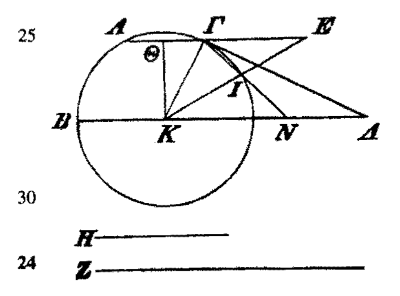
[32] El problema pretende, dado un círculo ABΓ con centro en K y una cuerda AΓ cuyo punto medio sea Θ, la construcción de una recta KB que corte en B a la circunferencia y en E a la cuerda AΓ de tal modo que se cumpla que BE : BΓ :: Z : H. Tal y como se expresa Arquímedes, el problema no admite una solución general, sino que requiere un diorismo: para que se pueda llevar a cabo la construcción es menester que Z : H < AΘ : KΘ.

[33] «Perpendicular a AΓ», se entiende.

que ΓΛ la razón que guarda Z con H [*Elem.* V 10]. Guárdela con BN, y entre la circunferencia y la recta póngase BN pasando por Γ —es posible que la corte así—. Y caerá fuera, puesto que es mayor que ΓΛ. Puesto que KB guarda con BN la misma razón que Z con H, también EB guardará con BΓ la misma razón que Z con H [*Elem.* VI 2].

Proposición 7

Con los mismos datos y prolongada la cuerda en el círculo, es posible trazar desde el centro hasta la cuerda prolongada una recta de manera que la ⟨parte de la⟩ recta ⟨que queda⟩ entre la circunferencia y la prolongación[34] *guarde la razón que se indique con la que une el extremo de la recta cortada dentro ⟨del círculo⟩ con el extremo de la prolongación, si la razón dada es mayor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella*[35].



Sean los mismos datos y sea prolongada la línea en el círculo y sea la razón dada la que guarda Z con H, mayor que la que guarda ΓΘ con ΘK.

Entonces también será mayor que la que guarda KΓ con

24 ΓΛ. Y la razón que guarde Z

[34] Entiéndase: «entre la circunferencia y el extremo exterior de la prolongación de la cuerda».

[35] Con la misma restricción que en la proposición anterior y partiendo de la misma construcción —dada la razón Z : H y dado un círculo ABΓ con centro en K y una cuerda AΓ cuyo punto medio sea Θ— plantea ahora el siguiente problema: una vez prolongada la cuerda como AΓE, trazar una recta KE, que corte a la circunferencia en I, de tal modo que se cumpla que EI : ΓI :: Z : H.

con H será la que guarde KΓ con una recta menor que ΓΛ [*Elem.* V 10]. Guárdela con IN tendente a Γ —es posible cortarla así—. Y caerá por dentro de ΓΛ, puesto que es menor que ΓΛ. Entonces, puesto que KΓ guarda con IN la misma razón que Z con H, también EI guardará con IΓ la misma razón que Z con H[36].

Proposición 8

Dado un círculo y en el círculo una cuerda menor que un diámetro y otra línea tangente al círculo en el extremo de la dada en el círculo, es posible trazar desde el centro del círculo una recta hasta la cuerda de manera que la ⟨parte⟩ tomada de ella[37] *entre la circunferencia del círculo y la cuerda dada en el círculo guarde con la ⟨parte⟩ tomada de la tangente la razón que se indique, si la razón fuera menor que la que guarda la mitad de la dada en el círculo con la perpendicular trazada hasta ella desde el centro del círculo*[38].

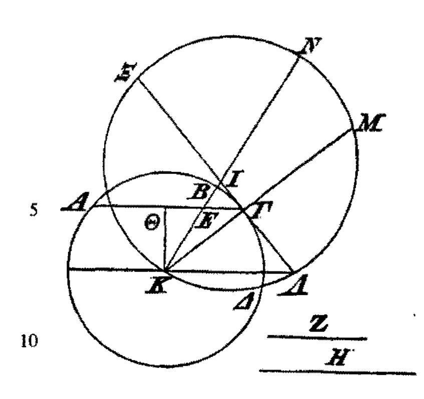
Sea ABΓΔ el círculo dado, y dese en el círculo una recta ΓA menor que el diámetro, y sea ΞΛ tangente al círculo en el punto Γ, y sea la razón que guarda Z con H menor que la que guarda ΓΘ con ΘK. Será también menor que la que guarda ΓK con ΓΛ, si se traza KΛ paralela a ΘΓ. Guarde KΓ con ΓΞ la misma razón que Z con H. Y ΞΓ es mayor que ΓΛ [*Elem.* V 10]. Trácese por KΛΞ una circunferencia de círculo.

[36] Heiberg lo justifica haciendo notar que los triángulos ΓIE, KIN son semejantes, por lo que KI : IN :: EI : IΓ, y KI, KΓ son iguales.

[37] Es decir, «de la recta que se pretende trazar».

[38] Con la misma restricción que en las proposiciones 6 y 7 y partiendo de nuevo de la construcción de la proposición 6 —dada la razón Z : H y dado un círculo ABΓ con centro en K y una cuerda AΓ cuyo punto medio sea Θ— y una vez trazada ΞΛ tangente al círculo en el punto Γ, construir una recta KN que corte a la cuerda en el punto E, al círculo en el punto B y a la tangente en el punto I, de tal modo que se cumpla que BE : IΓ :: Z : H.

Puesto que ΞΓ es mayor que ΓΛ y que KΓ, ΞΛ son perpendiculares entre sí, cabe que pongamos otra línea IN igual a MΓ tendente
26 a K. Entonces el rectángulo comprendido por ΞΙΛ guarda con el comprendido por KE, IΛ la misma razón que la recta ΞΙ con la KE y el rectángulo comprendido por KIN guarda con el comprendido por KI, ΓΛ la misma razón que IN con ΓΛ. De manera que también IN es a ΓΛ como ΞΙ a KE. De manera que también ΓM es a ΓΛ y ΞΓ a KΓ y a KB como ΞΙ es a KE y la restante IΓ guarda con BE la misma razón que ΞΓ con ΓK y que H con Z. Por tanto, KN incide en la tangente y la recta BE —la que está entre la circunferencia y la recta— guarda con la tomada de la tangente la misma razón que Z con H.



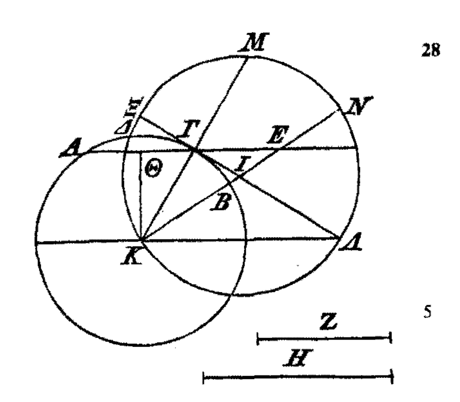
Proposición 9

Con los mismos datos y una vez prolongada la cuerda dada en el círculo, es posible trazar una recta desde el centro del círculo hasta la cuerda prolongada, de manera que la ⟨parte⟩ que queda entre la circunferencia y la prolongación[39] *guarde la razón indicada con la tomada de la tangente hasta el punto de contacto, si la razón dada es mayor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo con la perpendicular trazada hasta ella desde el centro*[40].

[39] Entiéndase: «entre la circunferencia y el extremo exterior de la prolongación».

[40] Siempre con la restricción expresada en la proposición 6 y con la misma

Sea ABΓΔ un círculo dado y en el círculo trácese una cuerda ΓA menor que el diámetro, y sea ΞΓ tangente al círculo en el punto Γ y sea la razón que guarda Z con H mayor que la que guarda ΓΘ con ΘK. **28**



Y será mayor que la que guarda KΓ con ΓΛ. Guarde KΓ con ΓΞ la misma razón que Z con H —pues ésta es menor que ΓΛ—. Trácese de nuevo un círculo por los puntos Ξ, K, Λ. Puesto que ΞΓ es menor que ΓΛ [*Elem.* V 10] y KM, ΞΓ son perpendiculares entre sí, es posible disponer una recta IN igual a ΓM y tendente a K. Puesto que el rectángulo comprendido por ΞΙΛ es al comprendido por ΛΙ, KE como la recta ΞΙ a la KE, mientras que el comprendido por KIN es igual al comprendido por ΞΙΛ [*Elem.* III 35] y el comprendido por KI, ΓΛ es igual al comprendido por ΛΙ, KE —porque KE es a IK como ΛΓ es a ΛΙ—, entonces ΞΙ es a KE como el rectángulo comprendido por KIN es al comprendido por KI, ΓΛ —es decir, como NI a ΓΛ; es decir, como ΓM a ΓΛ—. Y por otro lado, también ΓM es a ΓΛ como ΞΓ a KΓ [*Elem.* III 35] —esto es, a KB—. Por tanto, ΞΙ es a KE como ΞΓ a KB, y la restante IΓ es a la restante BE como ΞΓ a ΓK. Y la razón que guarda ΞΓ con ΓK es la que guarda H con Z. Y KE incide en la recta prolongada, y la recta BE —entre la prolongada y la circunferencia— guarda

construcción —dada la razón Z : H y un círculo ABΓ con centro en K y una cuerda AΓ con punto medio en Θ— y una vez prolongada la cuerda y trazada ΞΛ, tangente al círculo en el punto Γ, trazar desde el centro una recta que corte al círculo en B, a la prolongación de la cuerda en E y a la tangente en I de manera que BE : ΓΙ :: Z : H.

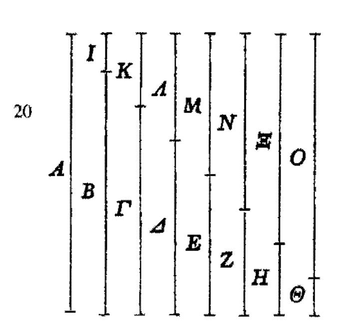
con ΓI —la ⟨parte⟩ tomada de la tangente— la misma razón que Z con H.

30

Proposición 10

Si se dispone sucesivamente un número cualquiera de líneas que se excedan unas a otras en lo mismo y el exceso es igual a la menor, y se disponen otras líneas iguales a ellas en número y cada una igual en magnitud a la mayor, y a los cuadrados construidos sobre las que son iguales a la mayor se les añade el cuadrado construido sobre la mayor y el rectángulo comprendido por la menor y una recta igual a la suma de todas las que se exceden entre sí en lo mismo será el triple de la suma de todos los cuadrados construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo.

Sean A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ un número cualquiera de rectas dispuestas sucesivamente que se exceden entre sí en lo mismo, y sea Θ igual al exceso y añádase a B una recta I igual a Θ, a Γ añádase K igual a H, a Δ añádase Λ igual a Z, a E añádase M igual a E, a Z añádase N igual a Δ, a H añádase Ξ igual a Γ, a Θ añádase O igual a B. Las rectas resultantes serán iguales entre sí y a la mayor.



Así pues, se ha de demostrar que si a los cuadrados construidos sobre todas las rectas A y las líneas resultantes se les añaden el cuadrado de lado A y el rectángulo comprendido por Θ y la recta igual a la suma de todas las rectas A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, será el triple de la suma de todos los cuadrados construidos sobre A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

El cuadrado de lado BI es igual a la suma de los cuadrados de lado I, B más dos rectángulos comprendidos por B, I; el cuadrado de lado KΓ es igual a la suma de los cuadrados de lado K, Γ más dos rectángulos comprendidos por K, Γ; e igualmente 32
los cuadrados construidos sobre las otras rectas iguales a A son iguales a la suma de los cuadrados construidos sobre sus segmentos más dos rectángulos comprendidos por sus segmentos. Por consiguiente, si a los cuadrados construidos sobre A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ y a los cuadrados construidos sobre I, K, Λ, M, N, Ξ, O se les añade el cuadrado construido sobre A son el doble de los cuadrados construidos sobre A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Queda demostrar que si al doble de los rectángulos comprendidos por los segmentos ⟨que forman⟩ cada línea de las iguales a A se les añade el rectángulo comprendido por Θ y una recta igual a ⟨la suma de⟩ todas las A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, ⟨la suma⟩ es igual a los cuadrados construidos sobre A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ.

Puesto que los dos rectángulos comprendidos por B, I son iguales a los dos comprendidos por B, Θ, y los dos comprendidos por K, Γ son iguales al comprendido por Θ y el cuádruple de Γ —por ser K el doble de Θ—, y los dos comprendidos por Δ, Λ son iguales al comprendido por Θ y el séxtuple de Δ —por ser Λ el triple de Θ—, e igualmente el doble de los otros rectángulos comprendidos por los segmentos[41] son iguales al rectángulo comprendido por Θ y una recta múltiplo de la recta siguiente, constantemente, según la serie de números pares, entonces, si se añade a la suma de todos los cuadrados el rectángulo comprendido por Θ y una recta igual a ⟨la suma de⟩ todas las A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, será igual al rectángulo comprendido por Θ y una recta igual a la suma de todas: A y el triple de B y el quíntuple de Γ y, constantemente, el múltiplo de la línea siguiente según la 34
serie de los números impares. Y la suma de los cuadrados de A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ es igual al rectángulo comprendido por esas

[41] Entiéndase «por los segmentos que componen cada una de las rectas».

mismas líneas, pues el cuadrado de lado A es igual al rectángulo comprendido por Θ y una recta igual a la suma de A más la suma de todas las restantes cada una de las cuales es igual a A —porque Θ mide a A el mismo número de veces que A a la suma de las que son iguales a ella más A—. De modo que el cuadrado de lado A es igual al rectángulo comprendido por Θ y por una recta igual a A más el doble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. Pues la suma de todas las rectas iguales a A excepto A es el doble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ. Y de manera semejante el cuadrado de lado B es igual al rectángulo comprendido por Θ y por una recta igual a B más el doble de Γ, Δ, E, Z, H, Θ; y, de nuevo, el cuadrado de lado Γ es igual al rectángulo comprendido por una recta igual a Γ más el doble de Δ, E, Z, H, Θ; y de manera semejante también los cuadrados que tienen por lado las otras rectas son iguales a los rectángulos comprendidos por Θ y una recta igual a ella misma más el doble de las restantes.

Es evidente, por tanto, que la suma de los cuadrados construidos sobre todas ellas son iguales al rectángulo comprendido por Θ y por una recta igual a la suma de A más el triple de B y el quíntuple de Γ y el múltiplo correspondiente de la siguiente ⟨recta⟩ según la serie de los números impares.

COROLARIO

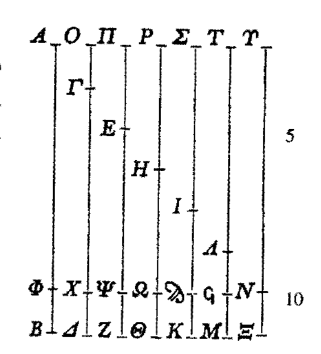
A partir de esto está claro que la suma de todos los cuadrados
36 construidos sobre las que son iguales a la mayor son menores que el triple de los cuadrados construidos sobre las rectas que se exceden entre sí en lo mismo —puesto que añadiendo ciertas áreas es el triple— pero mayores que el triple de ⟨la suma de⟩ los ⟨cuadrados⟩ de las restantes salvo el que tiene por lado la mayor, puesto que los cuadrados añadidos son menores que el triple del cuadrado construido sobre la mayor.

Así pues, si se construyen figuras semejantes sobre todas las rectas —sobre las que se exceden entre sí en lo mismo y las que

son iguales a la mayor— las figuras construidas sobre las que son iguales a la mayor serán menores que el triple de las figuras construidas sobre las que se exceden entre sí en lo mismo, pero mayores que el triple de las restantes salvo la figura construida sobre la mayor. Pues las figuras semejantes guardarán la misma razón que los cuadrados [*Elem.* VI 20].

Proposición 11

Si se ponen en serie líneas en un número cualquiera que se excedan entre sí en lo mismo, y se ponen otras líneas en número menor en uno que las que se exceden entre sí en lo mismo y cada una igual en magnitud a la mayor, ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre las que son iguales a la mayor guardará con ⟨la suma de⟩ los cuadrados de las que se exceden entre sí en lo mismo menos ⟨el cuadrado de⟩ la menor una razón menor que la que guarda el cuadrado construido sobre la mayor con ⟨la figura⟩ igual a la suma del rectángulo comprendido por la mayor y la menor más la tercera parte del cuadrado construido sobre el exceso en que excede la mayor a la menor, pero ⟨una razón⟩ mayor que esa misma razón con ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre las rectas que se exceden entre sí en lo mismo **38**
excepto el cuadrado construido sobre la mayor.



Sean rectas en un número cualquiera que se excedan entre sí en lo mismo dispuestas en serie: AB que excede a ΓΔ, ΓΔ a EZ, EZ a HΘ, HΘ a IK, IK a ΛM, ΛM a NΞ; añádase a ΓΔ la recta ΓO, igual a un exceso; a EZ, la recta EΠ, igual a dos excesos; a HΘ, la recta HP, igual a tres excesos; y de la misma manera a las otras. Las resultantes serán iguales entre sí y a la mayor.

Se ha de demostrar que la suma de los cuadrados construidos sobre todas las resultantes guardan con la suma de todos los cuadrados construidos sobre todas las que se exceden entre sí en lo mismo excepto el cuadrado construido sobre NΞ una razón menor que la que guarda el cuadrado de lado AB con un área igual a la suma del rectángulo comprendido por AB, NΞ más la tercera parte del cuadrado de lado NΥ, pero una razón mayor que esa misma razón con los cuadrados construidos sobre esas mismas rectas excepto el cuadrado de lado AB.

De cada una de las rectas que se exceden entre sí en lo mismo tómese una recta igual al exceso. La razón que guarda el cuadrado de lado AB con la suma del rectángulo comprendido por AB, ΦB más la tercera parte del cuadrado de lado AΦ, ésa es la razón que guarda el cuadrado de lado OΔ con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por OΔ, ΔX más la tercera parte del cuadrado de lado XO y[42] el cuadrado de lado ΠZ con el rectángulo comprendido por ΠZ, ΨZ más la tercera parte del cuadrado de lado ΨΠ y[43] los cuadrados construidos sobre las otras rectas con las áreas tomadas de manera semejante. Y la suma de los cuadrados construidos sobre todas las rectas OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ guardarán con la suma de todos los rectángulos comprendidos por NΞ y todas las rectas iguales a las líneas indicadas más las ⟨respectivas⟩ terceras partes de los cuadrados de lado OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN la misma razón que el cuadrado de lado AB con la suma del rectángulo comprendido por AB, ΦB más la tercera parte del cuadrado de lado ΦA [*Elem.* V 12].

Si se demuestra que el rectángulo comprendido por NΞ y una recta igual a ⟨la suma de⟩ OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ más la tercera parte de los cuadrados construidos sobre OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN, es menor que ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, pero mayor que ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ, se habrá demostrado lo propuesto [*Elem.* V 8].

En efecto, el rectángulo comprendido por NΞ y una recta igual a la suma de OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ más la tercera parte de los cuadrados construidos sobre OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN es igual a ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϡK, ϛM, NΞ más el rectángulo comprendido por NΞ y una recta igual a ⟨la suma de⟩ OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN más la tercera parte de los cuadrados construidos sobre OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN, mientras que ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM es igual a ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre BΦ, XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϡK, ϛM más los cuadrados construidos sobre AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ más el rectángulo comprendido por BΦ y el doble de la suma de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ [*Elem.* II 4].

Los cuadrados construidos sobre cada una de las rectas iguales a NΞ son comunes, mientras que el rectángulo comprendido por NΞ y una recta igual a la suma de OX, ΠΨ, ΩP, ϡΣ, ϛT, ΥN es menor que el comprendido por BΦ y una recta doble de la suma de AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ por ser las líneas recién mencionadas iguales a ΓO, EΠ, PH, IΣ, ΛT, ΥN pero mayores que las restantes, mientras que los cuadrados construidos sobre las rectas AΦ, ΓX, EΨ, HΩ, Iϡ, Λϛ son mayores que la tercera parte de los cuadrados construidos sobre OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN —pues esto se ha demostrado en las proposiciones anteriores [Prop. 10, corol.]—. Luego las áreas mencionadas son menores que los cuadrados construidos sobre AB, ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM.

Y demostraremos lo restante, que es mayor[44] que los cuadrados construidos sobre ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ.

[42] Entiéndase «y esa misma razón es la que guarda».

[43] Entiéndase «y la misma que guardan también».

[44] Ha de sobreentenderse como sujeto «el rectángulo comprendido por NΞ y una recta igual a (la suma de) OΔ, ΠZ, PΘ, ΣK, TM, ΥΞ más la tercera parte de los cuadrados construidos sobre OX, ΠΨ, PΩ, Σϡ, Tϛ, ΥN», como se indica en 40, 7.

De nuevo, los cuadrados construidos sobre ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ son iguales a ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre XΓ, EΨ, HΩ, IϠ, Λϛ más los construidos sobre XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϠK, ϛM, NΞ más el rectángulo comprendido por NΞ y el doble de la suma de todas las rectas ΓX, EΨ, HΩ, IϠ, Λϛ [*Elem.* II 4] y los cuadrados construidos sobre XΔ, ΨZ, ΩΘ, ϠK, Mϛ, NΞ son comunes, y el rectángulo comprendido por NΞ y por una recta igual a ⟨la suma de⟩ todas las rectas OX, ΠΨ, PΩ, ΣϠ, Tϛ, ΥN es mayor que el rectángulo comprendido por NΞ y el doble de ⟨la suma de⟩ todas las rectas ΓX, EΨ, HΩ, IϠ, Λϛ. Y, por otro lado, también ⟨la suma de⟩ los cuadrados construidos sobre XO, ΨΠ, ΩP, ϠΣ, ϛT, ΥN es mayor que el triple de los cuadrados construidos sobre ΓX, EΨ, HΩ, IϠ, Λϛ, pues esto también se ha demostrado [Prop. 10, corol.].

44 Luego las áreas mencionadas son mayores que los cuadrados construidos sobre ΓΔ, EZ, HΘ, IK, ΛM, NΞ.

COROLARIO

Y, por consiguiente, si se construyen figuras semejantes sobre todas las rectas —las que se exceden entre sí en lo mismo y las que son iguales a la mayor— ⟨la suma de⟩ todas las construidas sobre las que son iguales a la mayor guardará con ⟨la suma de⟩ las construidas sobre las que se exceden entre sí en lo mismo salvo la figura construida sobre la menor una razón menor que el cuadrado construido sobre la mayor con un área igual a la suma del rectángulo comprendido por la mayor y ⟨la suma de⟩ la menor más la tercera parte de la figura construida sobre el exceso en que la mayor excede a la menor, pero una razón mayor que ésa con las figuras construidas sobre esas mismas rectas salvo la ⟨construida⟩ sobre la mayor. Pues las figuras semejantes guardarán la misma razón que los cuadrados.

DEFINICIONES

1. Si se traza una línea recta en un plano y, permaneciendo fijo uno de sus extremos y haciéndola girar un número cualquiera de veces, vuelve de nuevo a la posición de la que partió y, al mismo tiempo que se hace girar la línea, se desplaza por la recta un punto a velocidad uniforme partiendo del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.

2. Llámese principio de la espiral al extremo de la recta que permanece fijo mientras ésta se desplaza.

3. Y principio del giro a la posición de la línea en la que la recta empezó a girar.

4. Llámese recta primera a la que recorre en el primer giro **46**
el punto que se desplaza por la recta, y segunda a la que recorre el mismo punto en el segundo giro y, de manera semejante, llámese a las otras con nombres homónimos de esos giros.

5. Llámese área primera a la comprendida por la espiral descrita en su primer giro y la recta primera, y área segunda a la comprendida por la espiral descrita en su segundo giro y la recta segunda, y llámese así sucesivamente a las demás.

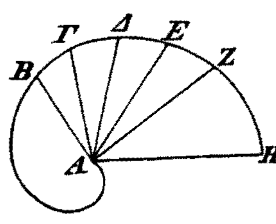
6. Y si desde el punto que es principio de la espiral se traza una línea recta, llámese lo de delante de esta recta a lo que está hacia el lado hacia el que se produce el giro, y lo de detrás a lo que está hacia el otro lado.

7. Llámese círculo primero al trazado con centro en el punto que es principio de la espiral y con la recta primera por radio; círculo segundo al trazado con el mismo centro y con el doble de esa recta por radio, y los demás sucesivos a éstos, de la misma manera.

PROPOSICIÓN 12

Si a la espiral descrita en un giro cualquiera la cortan un número cualquiera de rectas que parten del principio de la es-

piral y forman unas con otras ángulos iguales, se excederán entre sí en lo mismo.



Sea una espiral en la que inciden AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, que forman unas con otras ángulos iguales.

Se ha de demostrar que AΓ excede a AB en lo mismo que AΔ a AΓ y lo mismo las otras.

48 El tiempo en que la recta desplazada en sentido circular llega desde AB hasta AΓ es el mismo que el tiempo en que, al desplazarse el punto que está en la recta, recorre el exceso en que ΓA excede a AB, mientras que el tiempo en que se desplaza desde AΓ hasta AΔ es el mismo que aquél en que recorre el exceso en que AΔ excede a AΓ. Y la línea que se desplaza circularmente recorre en el mismo tiempo desde AB hasta AΓ que desde AΓ hasta AΔ, puesto que los ángulos son iguales. Por tanto, el punto que se desplaza por la recta recorre en el mismo tiempo el exceso en que ΓA excede a AB que el exceso en que AΔ excede a AΓ. Por tanto AΓ excede a AB en lo mismo que AΔ a AΓ [Prop. 1], y lo mismo las restantes.

Proposición 13

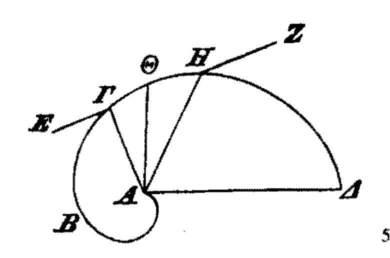
Si una recta es tangente a la espiral, lo será en un solo punto.

Sea una espiral en la que estén los puntos A, B, Γ, Δ, y sea el principio de la espiral el punto A y sea AΔ el principio del giro y sea tangente a la espiral una recta ZE.

Digo que le será tangente en un solo punto.

Séale tangente, si es posible, en dos puntos Γ, H y trácense AΓ, AH y córtese por la mitad el ángulo comprendido por AH, AΓ, y sea Θ el punto en que corta a la espiral la recta que corta por la mitad al ángulo.

Entonces AH excede a AΘ en lo mismo que AΘ a AΓ, puesto que contienen respectivamente ángulos iguales [Prop. 12]. De manera que ⟨la suma de⟩ AH, AΓ es el doble de AΘ. **50**
Pero es mayor[45] que el doble de la recta que corta por la mitad al ángulo en el triángulo[46]. Por tanto es evidente que el punto en que la recta AΘ corta a la ΓH está entre los puntos Θ, A. Luego EZ corta a la espiral, ya que uno de los puntos de la línea ΓΘH es interior a la espiral. Pero se había supuesto que era tangente. Luego EZ es tangente a la espiral en un solo punto.



Proposición 14

Si dos rectas que parten del punto que es principio de la espiral cortan a la espiral trazada en su primer giro y son prolongadas hasta la circunferencia del círculo primero, las rectas que cortan a la espiral guardarán entre sí la misma razón que los arcos de círculo que quedan entre el extremo de la espiral y los extremos de las rectas prolongadas que resultan en la circunferencia, tomados los arcos hacia lo de delante desde el extremo de la espiral.

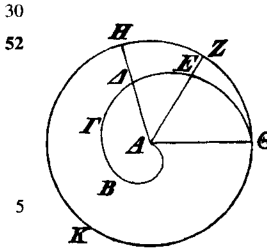
Sea ABΓΔEΘ una espiral trazada en su primer giro, y sea el punto A el principio de la espiral, y sea la recta ΘA el principio del giro, y sea ΘKH el círculo primero e incidan las rectas AE, AΔ en

[45] Como sujeto ha de sobreentenderse «la suma de AH, AΓ».

[46] Arquímedes aplica el teorema que dice que si un ángulo de un triángulo es cortado por la mitad, la suma de los lados que lo forman es mayor que el doble de la bisectriz, aunque ni Euclides ni el propio Arquímedes lo demuestran.

la espiral desde el punto A, y lleguen por el exterior hasta la circunferencia del círculo en los puntos Z, H.

Se ha de demostrar que AE guarda con AΔ la misma razón que el arco ΘKZ con el arco ΘKH.



52 Al desplazarse en círculo la línea AΘ, está claro que el punto Θ se ha ido desplazando a velocidad uniforme por la circunferencia del círculo ΘKH, mientras que el punto A que se desplaza por la recta recorre la línea AΘ; y el punto Θ desplazándose por la circunferencia del círculo recorre el arco ΘKZ mientras que el punto A recorre la recta AE; y, de nuevo, el punto A recorre la línea AΔ y el Θ el arco ΘKH, al desplazarse cada uno a velocidad uniforme.

Está claro por tanto que AE guarda con AΔ la misma razón que el arco ΘKZ con el arco ΘKH[47] [Prop. 2].

De la misma manera se demostrará también que, si una de las que inciden en la espiral incide en el extremo de la misma, sucede lo mismo.

Proposición 15

Si rectas que parten del principio de la espiral trazada en su segundo giro inciden en ella, las rectas guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados[48] *tomados juntamente con*[49] *la circunferencia entera del círculo.*

[47] [*Eso se ha demostrado aparte, en las proposiciones previas*].

[48] Tal y como se describían en la proposición 14, es decir, los arcos en sentido hacia delante que van del extremo de la espiral hasta los extremos de las rectas prolongadas donde coinciden con la circunferencia.

[49] Es decir, «sumados a».

Sea una espiral en la que figuran ABΓΔΘ, trazada en su primer giro ABΓΔΘ, y ΘΛEM en el segundo, e incidan en ella las rectas AE, AΛ.

Se ha de demostrar que AΛ guarda con AE la misma razón que el arco ΘKZ más la circunferencia entera del círculo con el arco ΘKH más la circunferencia entera del círculo.

El punto A, al desplazarse por la recta, recorre la línea AΛ en el mismo tiempo que el punto Θ, al desplazarse por la circunferencia del círculo, recorre entera la circunferencia del círculo y 54 además el arco ΘKZ; y, de nuevo, el punto A recorre la recta AE y el punto Θ la circunferencia entera del círculo y además ΘKH, desplazándose cada uno a velocidad uniforme.

Está claro por tanto que la línea AΛ guarda con la AE la misma razón que el arco ΘKZ más la circunferencia entera del círculo con el arco ΘKH más la circunferencia entera del círculo [Prop. 2].

* * *

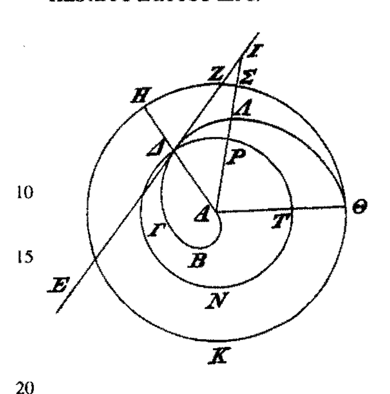
Del mismo modo se demostrará que, si unas rectas inciden en la espiral trazada en su tercer giro, guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados tomados juntamente con el doble de la circunferencia entera del círculo.

De manera semejante se demuestra también que las rectas que cortan a las otras espirales guardan la misma razón que los arcos indicados tomados juntamente con la circunferencia entera del círculo ⟨multiplicada⟩ tantas veces como el número del giro menos una, incluso si una de las rectas que corta a la espiral lo hace en su extremo.

Proposición 16

Si una línea recta es tangente a la espiral trazada en su primer giro y desde el punto de tangencia se traza una línea recta hasta el punto que es principio de la espiral, los ángulos que forma la tangente con la línea trazada serán desiguales y será obtuso el que está hacia lo de delante y agudo el que está hacia lo de detrás.

56 Sea una espiral en la que figuran A, B, Γ, Δ, Θ, trazada en su primer giro, y sea el punto A el principio de la espiral, y la recta AΘ el principio del giro y ΘKH el círculo primero y sea una línea recta EΔZ tangente a la espiral en el punto Δ, y desde Δ hasta A trácese ΔA.



Se ha de demostrar que ΔZ forma con AΔ un ángulo obtuso.

Trácese un círculo ΔTN con centro en A y radio AΔ. Por fuerza el arco de este círculo que mira hacia delante cae dentro de la espiral, mientras que el que mira hacia lo de detrás, fuera, porque de las rectas que inciden en la espiral partiendo de A, las que inciden en lo de delante son mayores que AΔ, mientras que las que inciden en lo de detrás, menores.

Que el ángulo comprendido por AΔZ no es agudo es evidente, puesto que es mayor que el del semicírculo[50], y que no es recto se demuestra así:

Pues sea, si es posible, recto.

[50] Heiberg indica: «Se refiere al ángulo comprendido por la recta AΔ y el arco ΔPT, mayor que cualquier ángulo agudo rectilíneo [*cf. Elem.* III 16]; por lo cual es evidente que este ángulo, siendo parte del AΔZ, ciertamente no es agudo [*Elem.* I, noción común 8]».

Entonces la recta EΔZ es tangente al círculo ΔTN [*Elem.* III 16, corol.]. Y es posible trazar una recta desde A hasta la tangente de modo que la recta que queda entre la tangente y el arco de circunferencia guarde con el radio del círculo una razón menor que la que guarda el arco que queda entre el punto de tangencia y la recta incidente con el arco dado [Prop. 5]. Sea la 58
incidente la recta AI.

Ésta cortará a la espiral en el punto Λ y al arco de círculo ΔNT en el punto P. Y guarde la recta PI con la AP una razón menor que la que guarda el arco ΔP con el arco ΔNT. Y entonces la recta entera IA guarda con la AP una razón menor que la que guarda el arco PΔNT con el arco ΔNT, es decir, la que guarda el arco ΣHKΘ con el arco HKΘ. Y la razón que guarda el arco ΣHKΘ con el arco HKΘ es la que guarda la recta AΛ con la AΔ —pues eso se ha demostrado [Prop. 14]—; por tanto AI guarda con AP una razón menor que ΛA con AΔ. Lo cual es imposible, pues PA es igual a AΔ [*Elem.* V 8].

Por tanto, el ángulo comprendido por AΔZ no es recto. Y se había demostrado que tampoco es agudo. Luego es obtuso; de manera que el restante es agudo.

De manera semejante se demostrará que también ocurrirá lo mismo si la recta tangente es tangente a la espiral en su extremo.

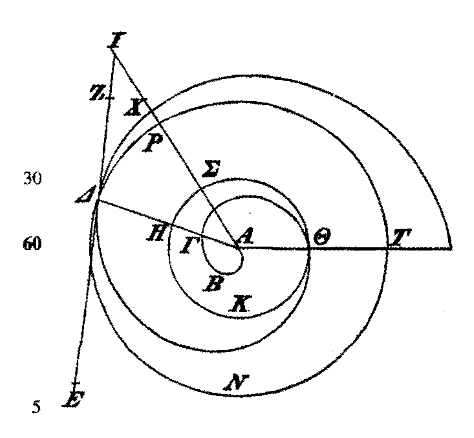
Proposición 17

Y efectivamente ocurrirá lo mismo si la recta es tangente a la espiral trazada en su segundo giro.

Sea la recta EZ tangente en el punto Δ a la espiral trazada en su segundo giro, y constrúyase lo demás igual que en lo anterior[51].

[51] Como en la Proposición 16.

De manera semejante, la parte de la circunferencia del círculo PNΔ que mira hacia lo de delante caerá dentro de la espiral, mientras que la que mira a lo de detrás, fuera. Por tanto, el ángulo comprendido por AΔZ no es recto, sino obtuso.



Pero sea, si es posible, recto.

Entonces EZ será tangente al círculo PNΔ en el punto Δ [*Elem.* III 16, corol.]. Trácese de nuevo AI hasta la tan-
60 gente, y corte a la espiral en el punto X y a la circunferencia del círculo PNΔ en el punto P, y guarde PI con PA una razón menor que la que guarda el arco ΔP con la circunferencia entera del círculo ΔPN más el arco ΔNT —pues se ha demostrado que esto es posible [Prop. 5].

Y entonces la recta entera IA guarda con la recta entera AP una razón menor que el arco PΔNT más la circunferencia entera del círculo, con el arco ΔNT más la circunferencia entera del círculo. Pero la razón que guarda el arco PΔNT más la circunferencia entera del círculo ΔNTP con el arco ΔNT más la circunferencia entera del círculo ΔNTP es la misma razón que guarda el arco ΣHKΘ más la circunferencia entera del círculo ΘΣHK con el arco HKΘ más la circunferencia entera del círculo ΘΣHK, y la razón que guardan los arcos indicados en último lugar es la razón que guarda la recta XA con la recta AΔ —pues esto se ha demostrado [Prop. 15]. Luego IA guarda con AP una razón menor que AX con AΔ. Lo cual es imposible[52].

[52] [*Pues PA es igual a AΔ, mientras que IA es mayor que AX*].

Es evidente, por tanto, que el ángulo comprendido por AΔZ es obtuso. De modo que el restante es agudo.

Lo mismo sucederá también si la recta tangente es tangente a la espiral en su extremo.

De la misma manera se demostrará también que si una recta 62
es tangente a la espiral trazada en cualquier giro y lo es en su extremo, formará ángulos desiguales con la recta trazada desde el punto de tangencia hasta el principio de la espiral y que el ángulo que mira hacia lo de delante es obtuso y el que mira hacia lo de detrás es agudo.

Proposición 18

Si una línea recta es tangente a la espiral trazada en su primer giro en el extremo de la espiral, y desde el punto que es principio de la espiral se traza una perpendicular a la recta principio del giro, la recta trazada cortará a la tangente, y la recta entre la tangente y el principio de la espiral será igual a la circunferencia del círculo primero.

Sea ABΓΔΘ una espiral, y sea el punto A el principio de la espiral, y la línea ΘA el principio del giro; sea ΘHK el círculo primero y sea ΘZ una recta tangente a la espiral en el punto Θ, y desde el punto A trácese AZ perpendicular a ΘA. Ésta llegará a cortar a ΘZ, puesto que ZΘ, ΘA contienen un ángulo agudo [Prop. 16; *Elem.* I, post. 5]. Córtela en el punto Z.

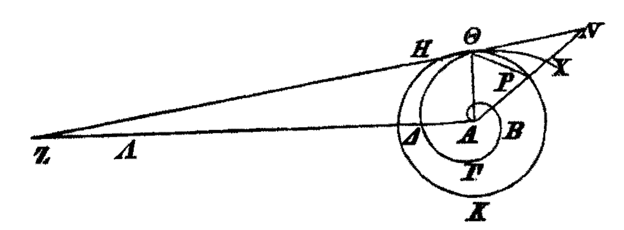
Se ha de demostrar que ZA es igual a la circunferencia del círculo ΘKH.

Pues si no, o bien es mayor o es menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

He tomado una recta ΛA menor que la recta ZA, pero mayor que la circunferencia del círculo ΘHK [Prop. 4] y hay un círcu-
lo ΘHK y en el círculo, una línea ΘH menor que el diámetro, y 64
la razón que guarda ΘA con AΛ es mayor que la que guarda la

mitad de HΘ con la perpendicular trazada desde A hasta ella[53], por lo cual ⟨es mayor⟩ también que la que guarda ΘA con AZ. Por tanto, es posible trazar una recta desde A hasta la prolongación de la recta AN de modo que NP —la ⟨que queda⟩ entre el arco y la recta prolongada— guarde con ΘP la misma razón que ΘA con AΛ [Prop. 7].



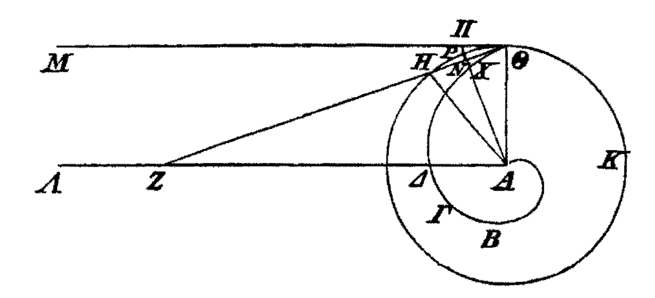
Por tanto, NP guardará con PA la misma razón que la recta ΘP con AΛ. Pero ΘP guarda con AΛ una razón menor que el arco ΘP con la circunferencia del círculo ΘHK, pues la recta ΘP es menor que el arco ΘP, mientras que la recta AΛ es mayor que la circunferencia del círculo ΘHK. Por tanto, NP guardará con PA una razón menor que el arco ΘP con la circunferencia del círculo ΘHK. Y entonces la recta entera NA guarda con AP una razón menor que el arco ΘP más la circunferencia entera del círculo con la circunferencia del círculo ΘHK. Y la razón que guarda el arco ΘP más la circunferencia entera del círculo ΘHK con la circunferencia del círculo ΘHK, es la que guarda la recta XA con AΘ —pues eso se ha demostrado [Prop. 15]—. Luego NA guarda con AP una razón menor que XA con AΘ. Lo cual es imposible, pues NA es mayor que AX mientras que AP es igual a ΘA.

Luego ZA no es mayor que la circunferencia del círculo ΘHK.

Sea ahora, si es posible, menor ZA que la circunferencia del círculo ΘHK.

[53] Es decir, «hasta HΘ».

De nuevo he tomado una recta AΛ mayor que AZ pero menor que la circunferencia del círculo ΘHK [Prop. 4], y desde Θ 66
trazo ΘM, paralela a AZ. De nuevo hay un círculo ΘHK y en el círculo, una línea ΘH menor que el diámetro y otra tangente al



círculo[54] en el punto Θ [*Elem.* III 16, corol.], y la razón que guarda AΘ con AΛ es menor que la que guarda la mitad de HΘ con la perpendicular trazada hasta ella desde A, puesto que también es menor que la que guarda ΘA con AZ. Por tanto, es posible trazar AΠ desde A hasta la tangente de manera que PN —la ⟨que queda⟩ entre la recta que hay en el círculo y el arco— guarde con ΘΠ —la recta cortada de la tangente— la misma razón que guarda ΘA con AΛ [Prop. 8].

La recta AΠ cortará al círculo en P y a la espiral en X. Y, tomando la proporción en alternancia, NP guardará con PA la misma razón que ΘΠ con AΛ. Pero ΘΠ guarda con AΛ una razón mayor que el arco ΘP con la circunferencia del círculo ΘHK. Pues la recta ΘΠ es mayor que el arco ΘP, mientras que la recta AΛ es menor que la circunferencia del círculo ΘHK. Luego ΠP guarda con AP una razón mayor que el arco ΘP con la circunferencia del círculo ΘHK. De modo que PA guarda con AN una razón mayor que la circunferencia del círculo ΘHK con el arco ΘKP. Y la razón que guarda la circunferencia del círculo ΘHK con el arco ΘKP es la misma que la que guarda la

[54] La recta ΘM.

recta ΘA con AX —pues eso se ha demostrado [Prop. 14]—. Luego PA guarda con AN una razón mayor que ΘA con AX. Lo cual es imposible.

68 Luego ZA no es mayor ni menor que la circunferencia del círculo ΘHK. Luego es igual.

Proposición 19

Si una recta es tangente en el extremo de una espiral trazada en su segundo giro y desde el principio de la espiral se traza una recta perpendicular a la recta principio del giro, ésta incidirá en la tangente, y la recta entre la tangente y el principio de la espiral será el doble de la circunferencia del segundo círculo.

Sea ABΓΘ una espiral trazada en su primer giro, y ΘET en su segundo giro, y sea ΘKH su círculo primero y TMN el segundo, y sea TZ una línea tangente a la espiral en el punto T, y trácese ZA perpendicular a TA. Ésta incidirá en TZ, puesto que ya se ha demostrado que el ángulo comprendido por ATZ es agudo [Prop. 17].

Se ha de demostrar que la recta ZA es el doble de la circunferencia del círculo TMN.

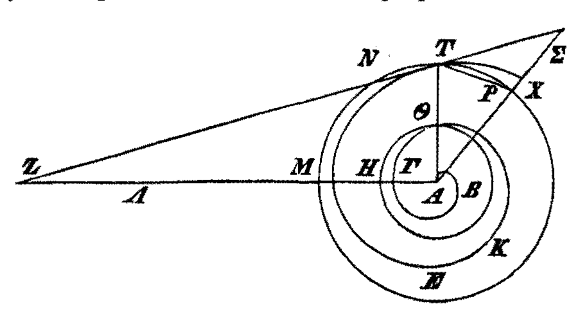
Pues si no es el doble, es mayor que el doble o menor que el doble.

Sea primero, si es posible, mayor que el doble, y tómese una recta AΛ menor que la recta ZA, pero mayor que el doble de la circunferencia del círculo TMN [Prop. 4].

Hay un círculo TMN y en el círculo una línea dada TN menor que el diámetro, y la razón que guarda TA con AΛ es mayor que la que guarda la mitad de TN con la perpendicular trazada desde A hasta ella. Por tanto es posible trazar AΣ desde A hasta

70 la prolongación de TN de manera que PΣ —la ⟨que queda⟩ entre

el arco y la prolongación[55]— guarde con TP la misma razón que TA con AΛ [Prop. 7]. Entonces AΣ cortará al círculo en el punto P y a la espiral en X. Y, tomando la proporción en alternancia[56], PΣ guardará con TA la misma razón que TP con AΛ. Pero TP guarda con AΛ una razón menor que el arco TP con el doble de la circunferencia del círculo TMN, pues la recta TP es menor que el arco TP, mientras que la recta AΛ es mayor que el doble de la circunferencia del círculo TMN. Por tanto PΣ guarda con AP una razón menor que el arco TP con el doble de la circunferencia del círculo TMN. Por tanto, la recta entera ΣA guarda con la AP una razón menor que el arco TP más el doble de la mencionada circunferencia del círculo TMN con el doble de la indicada circunferencia del círculo TMN. Y la razón que guardan estos arcos ⟨y circunferencias⟩ es la razón que guarda XA con AT —pues esto se ha demostrado [Prop. 15 (54, 19)]—. Luego AΣ guarda con AP una razón menor que XA con TA, lo cual es imposible.



Luego la recta ZA no es mayor que el doble de la circunferencia del círculo TMN.

De modo semejante se demostrará que tampoco es menor que el doble. Por tanto es evidente que es el doble.

---

[55] «La prolongación de TN», se entiende.

[56] Es decir, considerando que el antecedente es al antecedente como el consecuente al consecuente; *cf.* vol. I, Introducción, pág. 51.

Por el mismo medio se ha de demostrar también que, si una recta es tangente en el extremo de la espiral a una espiral trazada en cualquier giro y una recta trazada desde el principio de la espiral perpendicular a la recta principio del giro corta a la tan-
72 gente, será múltiplo de la circunferencia del círculo denominado según el número del giro en el mismo número[57].

Proposición 20

Si una línea recta es tangente a la espiral trazada en su primer giro, pero no en el extremo de la espiral, y se traza una recta desde el punto de tangencia hasta el principio de la espiral y con centro en el principio de la espiral y radio la recta trazada se traza un círculo y desde el principio de la espiral se traza una recta perpendicular a la trazada desde el punto de tangencia hasta el principio de la espiral, ésta cortará a la tangente, y la recta entre el punto de corte y el principio de la espiral será igual al arco de circunferencia del círculo trazado —el ⟨que está⟩ entre el punto de tangencia y el de corte en el que el círculo trazado corta a la recta origen de la traslación, tomando el arco hacia lo de delante desde el punto en la recta principio del giro.

Sea una espiral en la que figura ΑΒΓΔ, trazada en su primer giro y sea tangente a ella la recta EZ en el punto Δ, y desde Δ hasta el principio de la espiral trácese ΑΔ, y con centro en A y radio ΑΔ trácese el círculo ΔMN, y corte éste a la recta principio del giro en el punto K y trácese ZA perpendicular a ΑΔ.

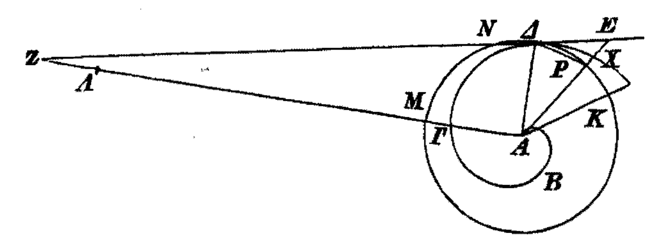
Que la cortará[58] es evidente [Prop. 16]. Pero que la recta ZA es igual al arco KMNΔ hay que demostrarlo.

74 Pues si no, o bien es mayor o es menor.

[57] *Cf.* Props. 15 y 17.

[58] «A la tangente EZ», se entiende.

Sea primero, si es posible, mayor, y tómese una recta ΛA menor que ZA pero mayor que el arco KMNΔ [Prop. 4].



De nuevo, KMN es un círculo, y en el círculo hay una línea ΔN menor que el diámetro, y la razón que guarda ΔA con AΛ es mayor que la que guarda la mitad de ΔN con la perpendicular trazada desde A hasta ella. Por tanto, es posible trazar AE desde A hasta la prolongación de NΔ, de manera que EP guarde con ΔP la misma razón que ΔA con AΛ —pues se ha demostrado que esto es posible [Prop. 7].

Por tanto, EP guardará con AP la misma razón que ΔP con AΛ. Pero ΔP guarda con AΛ una razón menor que el arco ΔP con el arco KMΔ, puesto que ΔP es menor que el arco ΔP mientras que AΛ es mayor que el arco KMΔ. Por tanto la recta EP guarda con PA una razón menor que el arco ΔP con el arco KMΔ. De manera que también AE guarda con AP una razón menor que el arco KMP con el arco KMΔ. Y la razón que guarda el arco KMP con el arco KMΔ es la que guarda XA con AΔ [Prop. 14]. Por tanto EA guarda con AP una razón menor que AX con ΔA. Lo cual es imposible.

Luego ZA no es mayor que el arco KMΔ. Y de la misma manera que en las proposiciones anteriores se demostrará que tampoco es menor. Luego es igual.

Por el mismo medio se demostrará también que, si una recta es tangente a una espiral trazada en su segundo giro, pero no en el extremo de la espiral, y se construye lo demás igual[59], la rec-

[59] «Igual que en esta misma proposición», se entiende.



ta entre el punto de corte con la tangente y el principio de la
76 espiral es igual a la circunferencia entera del círculo trazado más el arco entre los puntos indicados, tomado el arco de la misma manera.

Y que si una recta es tangente a una espiral trazada en cualquiera de sus giros, pero no en el extremo de la espiral, y se construye lo demás igual, la recta entre los puntos indicados es múltiplo, en un número menos que el que indican los giros, de la circunferencia del círculo trazado, e igual ⟨a esto⟩ más el ⟨arco⟩ tomado de modo semejante entre los puntos indicados[60].

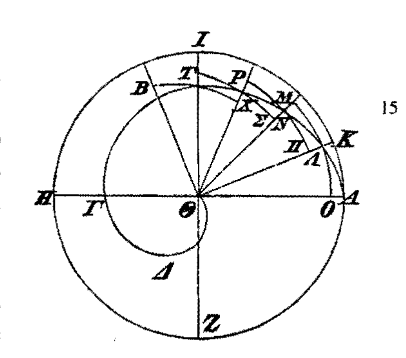
Proposición 21

Si se toma el área comprendida por la espiral trazada en su primer giro y la recta primera ⟨tomada⟩ en la que es principio del giro, es posible circunscribir a esa área una figura plana e inscribir otra, compuestas de sectores semejantes, de modo que la figura circunscrita sea mayor que la inscrita en un área menor que cualquier área propuesta.

Sea una espiral, en la que figura ΑΒΓΔ, trazada en su primer giro y sea el punto Θ el principio de la espiral y ΘΑ la recta principio del giro y ΖΗΙΑ el círculo primero y ΑΗ, ΖΙ diámetros de éste, perpendiculares entre sí. Una vez cortado repetidamente por la mitad el ángulo recto y el sector que comprende el
78 ángulo recto, lo que quede del sector será menor que el área propuesta [*Elem.* X 1]. Resulte el sector ΑΘΚ menor que el área propuesta. Córtense los cuatro ángulos rectos en ángulos iguales al comprendido por ΑΘ, ΘΚ, y trácense hasta la espiral las rectas que forman los ángulos. Sea Λ el punto en el que ΘΚ corta a la espiral, y con centro en Θ y radio ΘΛ trácese un círculo. La parte de su circunferencia que está hacia lo de delante

[60] *Cf.* props. 15 y 17.

caerá dentro de la espiral, y la que está hacia lo de detrás, fuera. Trácese el arco hasta donde corte a ΘΑ[61] y hasta la recta que corta a la espiral después de ΘΚ. Y, de nuevo, sea Ν el punto en que ΘΜ corta a la espiral, y con centro en Θ y radio ΘΝ trácese un círculo hasta que el arco del círculo corte a ΘΚ y a la recta que corta a la espiral a continuación de ΘΜ y, de manera semejante, por todos los otros puntos en que las rectas que forman los ángulos iguales cortan a la espiral trácense círculos[62] con centro en Θ hasta que cada arco corte a la recta precedente y a la siguiente. En torno al área tomada habrá, entonces, una figura circunscrita compuesta de sectores iguales y otra inscrita.



Se demostrará que la figura circunscrita es mayor que la inscrita en un área menor que la propuesta.

Pues el sector ΘΛΟ es igual al ΘΜΛ, y el ΘΝΠ igual al ΘΝΡ, y el ΘΧΣ igual al ΘΧΤ, y cada uno de los demás sectores que hay en la figura inscrita es igual al sector de la figura circunscrita con el que tiene un lado común. Es evidente, por tanto, que todos y cada uno de los sectores son iguales a todos y 80
cada uno. Por tanto, la figura inscrita en el área es igual a la figura circunscrita al área salvo el sector ΘΑΚ, pues éste es el único de los de la figura circunscrita que no ha sido tomado.

Es evidente por tanto que la figura circunscrita es mayor que la inscrita en el sector ΑΚΘ, que es menor que el área propuesta.

[61] [*En el punto O, el arco OM*].

[62] Gr. *kýkloi*; en realidad se refiere a «arcos de circunferencia» *(cf.* figura).

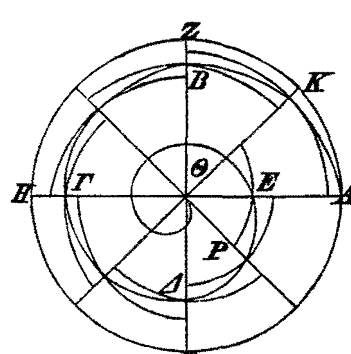
COROLARIO

A partir de esto es evidente que es posible trazar como se ha dicho una figura en torno al área indicada de manera que la figura circunscrita sea mayor que ⟨tal⟩ área en menos que cualquier área propuesta y, a la vez, inscribir ⟨una figura⟩ de modo que, de manera semejante, el área sea mayor que la figura inscrita en menos que cualquier área propuesta.

Proposición 22

Si se toma el área comprendida por la espiral trazada en su segundo giro y, en la recta que es principio del giro, la recta segunda, es posible circunscribir a ella una figura plana compuesta de sectores semejantes, e inscribir otra de modo que la figura circunscrita sea mayor que la inscrita en menos que cualquier área propuesta.

Sea una espiral, en la que figura ΑΒΓΔΕ, trazada en su segundo giro y sea el punto Θ el principio de la espiral y ΑΘ la recta principio del giro y, en la recta principio del giro, sea ΕΑ la recta segunda, y sea ΑΖΗ el círculo segundo y ΑΓΗ, ΖΙ diámetros del mismo, mutuamente perpendiculares.



Una vez cortado de nuevo por la mitad el ángulo recto y
82 el sector que comprende el ángulo recto, el área restante será menor que la propuesta [*Elem.* X 1]. Y resulte el sector ΘΚΑ menor que el área propuesta. Una vez divididos los ángulos rectos en ángulos iguales

al comprendido por ΚΘΑ y construido lo demás del mismo modo que en lo anterior [Prop. 21], la figura circunscrita será mayor que la figura inscrita en menos que el sector ΘΚΑ, pues será mayor que el exceso en que el sector ΘΚΑ excede al sector ΘΕΡ.

COROLARIO

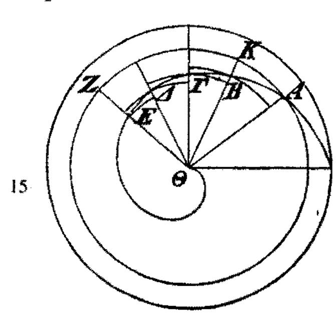
Está claro, por consiguiente, que es posible tanto que la figura circunscrita sea mayor que el área tomada en menos que el área propuesta como que, a la inversa, el área tomada sea mayor que la figura inscrita en menos que cualquier área propuesta.

Por el mismo medio, está claro que si se toma el área comprendida por la espiral trazada en cualquiera de sus giros y la recta ⟨tomada en la que es⟩ principio de la traslación denominada según ese mismo número, es posible circunscribirle una figura plana como se ha indicado, de manera que la figura circunscrita sea mayor que el área tomada en menos que cualquier área propuesta y, a la vez, inscribir ⟨otra⟩ de manera que el área tomada sea mayor que la figura inscrita en menos que cualquier área propuesta.

Proposición 23

Si se toma el área comprendida por una espiral menor que la trazada en su primer giro —que no tenga por extremo el origen de la espiral— y por las rectas trazadas desde los extre-
mos de la espiral, es posible circunscribir a ⟨tal⟩ área una figu- 84
ra plana compuesta de sectores semejantes e inscribir otra, de manera que la figura circunscrita sea mayor que la inscrita en menos que cualquier área propuesta.

Sea una espiral en la que figura ΑΒΓΔΕ, y sean sus extremos Α, Ε, y sea Θ el origen de la espiral, y trácense ΑΘ, ΘΕ. Trácese un círculo con centro en Θ y radio ΘΑ, y corte a ΘΕ en Ζ. Cortando por la mitad repetidamente el ángulo de vértice en Θ y el sector ΘΑΖ, el área restante será menor que la propuesta. Sea el sector ΘΑΚ menor que el área propuesta.



Del mismo modo que en las demostraciones anteriores, trácense círculos que pasen por los puntos en los que las rectas que forman los ángulos iguales de vértice en Θ cortan a la espiral, de manera que cada uno de los arcos corte a la recta anterior y a la siguiente. Habrá una figura plana circunscrita al área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕ y las rectas ΑΘ, ΘΕ, compuesta de sectores semejantes, y otra circunscrita, y la circunscrita excede a la inscrita en un área menor que el área propuesta. Pues el sector ΘΑΚ es menor.

COROLARIO

A partir de esto, está claro que es posible circunscribir al
86 área dicha una figura plana como se ha indicado, de manera que la figura circunscrita sea mayor que el área[63] en un área menor que cualquier área propuesta y, a la vez, inscribir ⟨otra⟩ de manera que el área indicada sea mayor que la figura inscrita en menos que cualquier área propuesta.

[63] «De la espiral», se entiende.

PROPOSICIÓN 24

El área comprendida por la espiral trazada en su primer giro y por la recta primera ⟨tomada⟩ en la recta principio del giro es la tercera parte del círculo primero[64].

Sea una espiral en la que figura ΑΒΓΔΕΘ, trazada en su primer giro, y sea el punto Θ el origen de la espiral, ΘΑ la recta primera ⟨tomada⟩ en la recta principio del giro y ΑΚΖΗΙ el círculo primero, y sea el círculo en el que figura ϛ la tercera parte de éste.

Se ha de demostrar que el área propuesta es igual al círculo ϛ.

Pues si no, o bien es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, menor.

Entonces, es posible circunscribir una figura plana compuesta de sectores semejantes al área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕΘ y la recta ΘΑ de manera que la figura circunscrita sea mayor que el área en menos que el exceso en que excede el círculo ϛ al área indicada [Prop. 21, corol.]. Circunscríbase, y **88**
sea ΘΑΚ el mayor de los sectores que componen la figura indicada y ΘΕΟ el menor.

Es evidente, por tanto, que la figura circunscrita es menor que el círculo ϛ [por hipót.]. Prolónguense las rectas que forman los ángulos iguales con vértice en Θ hasta que incidan en la circunferencia del círculo.

Hay unas líneas que desde Θ inciden en la espiral y que se exceden entre sí en lo mismo, de las cuales la mayor es ΘΑ y la menor ΘΕ, y la menor es igual al exceso. Y hay otras líneas que desde Θ inciden en la circunferencia del círculo, iguales en número a aquéllas e igual cada una en magnitud a la mayor, y a partir de todas ellas se han construido sectores semejantes, tanto a partir de las que se exceden entre sí en lo mismo como a

[64] En la carta que precede al tratado figura otro enunciado; Papo ofrece también una demostración de este aserto en *Collectio Mathematica* IV 34.

partir de las que son iguales entre sí y a la mayor. Luego ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales a la mayor es menor que el triple de los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo —pues esto se ha demostrado [Prop. 10, corol.]—. Y ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales entre sí y a la mayor es igual al círculo AZHI, mientras que ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo es igual a la figura circunscrita. Por tanto, el círculo AZHI es menor que el triple de la figura circunscrita; pero era el triple del círculo ς. Luego el círculo ς sería menor que la figura circunscrita; pero no lo es, sino que es mayor.

Luego el área comprendida por la espiral ABΓΔEΘ y la recta AΘ no es menor que el área ς.

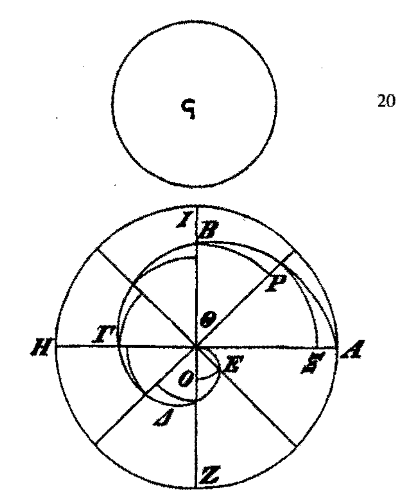
90 Y tampoco es mayor.

Pues sea, si es posible, mayor.

De nuevo, es posible inscribir una figura en el área comprendida por la espiral ABΓΔEΘ y la recta AΘ de manera que el área indicada sea mayor que la figura inscrita en menos que aquello en lo que excede el área indicada al círculo ς [Prop. 21, corol.]. Inscríbase, y sea ΘPΞ el mayor de los sectores de que está compuesta la figura inscrita, y OΘE el menor. Es evidente que la figura inscrita es mayor que el círculo ς. Prolónguense las rectas que forman los ángulos iguales con vértice en Θ hasta que incidan en la circunferencia del círculo.

De nuevo hay ciertas líneas que se exceden entre sí en lo mismo, las que inciden en la espiral desde Θ [Prop. 12], de las

cuales ΘA es la mayor y ΘE la menor, y la menor es igual al exceso, y hay otras rectas, las que desde Θ inciden en la circunferencia del círculo AZHI iguales a aquéllas en número, y en magnitud igual cada una a la mayor, y se han construido sectores semejantes sobre todas ellas, tanto sobre las que son iguales entre sí y a la mayor como sobre las que se exceden entre sí en lo mismo. Por tanto ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales a la mayor es mayor que el triple de ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo, excepto el construido sobre la mayor —pues esto se ha demostrado [Prop. 10, corol.]—. Y, por otro lado, ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales a la mayor es 92
igual al círculo AZHI, mientras que ⟨la suma de⟩ los construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo, excepto el construido sobre la mayor, es igual a la figura inscrita. Por tanto el círculo AZHI es mayor que el triple de la figura inscrita; y es el triple del círculo ς. Luego el círculo ς es mayor que la figura inscrita. Pero no lo es, sino que es menor.



Luego el área comprendida por la espiral ABΓΔEΘ y la recta AΘ tampoco es mayor que el círculo ς. Luego es igual[65].

[65] [*Al área comprendida por la espiral y la recta AΘ*].

Proposición 25

El área comprendida por la espiral trazada en su segundo giro y por la recta segunda ⟨tomada⟩ en la recta principio del giro, guarda con el círculo segundo la misma razón que guarda 7 con 12, que es la misma que guarda la suma del rectángulo comprendido por el radio del círculo segundo y el radio del círculo primero más la tercera parte del cuadrado construido sobre el exceso en que excede el radio del círculo segundo al radio del círculo primero con el cuadrado construido sobre el radio del círculo segundo[66].

Sea una espiral en la que figura ΑΒΓΔΕ, trazada en su segundo giro, y sea el punto Θ el origen de la espiral, y la recta ΘΕ una recta primera ⟨tomada⟩ en la recta principio del giro, y ΑΕ la recta segunda en la recta principio del giro, y sea ΑΖΗΙ el círculo segundo, y ΑΗ, ΙΖ diámetros de éste perpendiculares entre sí.

Se ha de demostrar que el área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕ y la recta ΑΕ guarda con el círculo ΑΖΗΙ la razón de 7 a 12.

Sea un círculo ϛ y sea el cuadrado construido sobre el radio del círculo ϛ igual al rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΕ más la tercera parte del cuadrado construido sobre ΑΕ. El círculo ϛ guardará con el ΑΖΗΙ la razón de 7 a 12, puesto que el cuadrado de su radio guarda esa razón cqn el cuadrado del radio del círculo ΑΖΗΙ[67] [*Elem.* XII 2].

[66] Llamando E_2 al área comprendida por la espiral y la recta segunda, C_1 al círculo primero y R_1 a su radio y C_2 al círculo segundo y R_2 a su radio, lo que se quiere demostrar es que $E_2 : C_2 :: 7 : 12 :: (R_2 \times R_1) + [(R_2 - R_1)^2 / 3] :: R_2^2$.

[67] En aplicación de *Elem.* XII 2, ϛ : ΑΖΗΙ :: $A\Theta \times \Theta E + (1/3\ AE^2) :: A\Theta^2$, y de acuerdo con la proposición 15, $\Theta E = AE$; por tanto, $2\ \Theta E^2 + (1/3\ \Theta E^2) :: 4\ AE^2 :: 6\ \Theta E^2 + \Theta E^2 :: 12\ AE^2 :: 7 : 12$.

Por tanto, se demostrará que el círculo ϛ es igual al área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕ y la recta ΑΕ.

Pues si no, o bien es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

Es posible circunscribir al área una figura plana compuesta de sectores semejantes de modo que la figura circunscrita sea mayor que el área en menos que aquello en lo que excede el círculo ϛ al área [Prop. 22, corol.]. Circunscríbase, y de los sectores que componen el área circunscrita sea ΘΑΚ el mayor y ΘΟΔ el menor. Es evidente que la figura circunscrita es menor que el círculo. Prolónguense las rectas que forman los ángulos iguales con vértice en Θ hasta que incidan en la circunferencia del segundo círculo.

Hay ciertas líneas que se exceden entre sí en lo mismo [Prop. 12], las que inciden en la espiral desde Θ, de las cuales la mayor es ΘΑ y la menor ΘΕ, y hay otras rectas, las que desde Θ inci- **96**
den en la circunferencia del círculo ΑΖΗΙ, en número menores en una que aquéllas y en magnitud iguales entre sí y a la mayor, y se han construido sectores semejantes sobre las que son iguales a la mayor y sobre las que se exceden entre sí en lo mismo, pero no se ha construido ⟨ninguno⟩ sobre la menor. Luego ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales a la mayor guarda con ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo menos ⟨el construido sobre⟩ la menor una razón menor que el cuadrado construido sobre la mayor, ΘΑ, con la suma del rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΕ más la tercera parte del cuadrado de lado ΕΑ —pues esto se ha demostrado [Prop. 11, corol.]—. Y el círculo ΑΖΗΙ es igual a ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales entre sí y a la mayor, mientras que la figura circunscrita es igual a ⟨la suma de⟩ los sectores construidos a partir de las que se exceden entre sí en lo mismo menos ⟨el

construido sobre⟩ la menor. Luego el círculo guarda con la figura circunscrita una razón menor que la del cuadrado de lado AΘ con la suma del rectángulo comprendido por AΘ, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado AE. Y la razón que guarda el cuadrado de lado ΘA con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por ΘA, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado AE es la que guarda el círculo AZHI con el círculo ϛ [*Elem.* V 7, corol.]. Por tanto, el círculo AZHI guarda con la figura circunscrita una razón menor que con el círculo ϛ. De modo que el círculo ϛ es menor que la figura circunscrita [*Elem.* V 10]. Pero no lo es, sino que es mayor.

Luego el círculo ϛ no es mayor que el área comprendida por la espiral ABΓΔE y la recta AE[68].

Y tampoco es menor.

Pues sea, si es posible, menor.

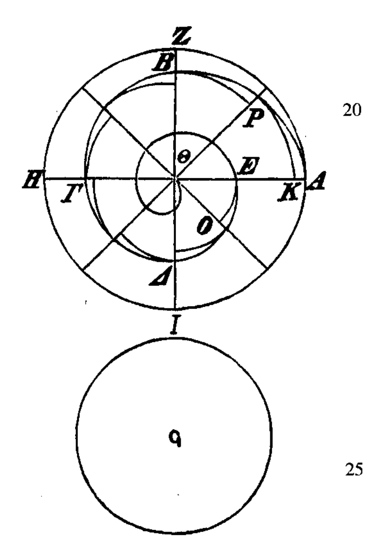
98 De nuevo, es posible inscribir en el área comprendida por la espiral y la recta AE una figura plana compuesta de sectores semejantes de manera que el área comprendida por la espiral ABΓΔE y la recta AE sea mayor que la figura inscrita en menos que aquello en lo que excede esa misma área al círculo ϛ [Prop. 22, corol.]. Inscríbase, y sea ΘKP el mayor de los sectores que componen la figura inscrita y ΘEO el menor[69]. Es evidente que la figura inscrita es mayor que el círculo ϛ. Prolónguense las rectas que forman los ángulos iguales con vértice en Θ hasta que incidan en la circunferencia del círculo.

De nuevo hay unas líneas que se exceden entre sí en lo mismo, las que desde Θ inciden en la espiral [Prop. 12], de las

[68] Por errata figura «AZ» en el texto griego de Heiberg; en la versión latina, sin embargo, aparece correctamente «AE». El texto griego y la versión francesa de Mugler contienen la misma errata. Sin embargo, todo aparece correctamente en la segunda parte de la demostración (II **100** 10).

[69] En la figura correspondiente a esta parte de la demostración, la edición de Heiberg —seguido por Mugler— presenta como ZZ el diámetro del círculo que en nuestra figura aparece como ZI; corregimos esa anomalía siguiendo a Ver Eecke.

cuales la mayor es ΘA y la menor ΘE y hay otras líneas, las que desde Θ inciden en la circunferencia del círculo, en número inferiores en una a aquéllas y en magnitud iguales entre sí y a la mayor, y se han construido sectores semejantes sobre las que se exceden entre sí en lo mismo y sobre las que son iguales a la mayor. Luego ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales a la mayor guarda con ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo menos el construido sobre la mayor una razón mayor que el cuadrado de lado ΘA con la suma del rectángulo comprendido por AΘ, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado EA [Prop. 11, corol.]. Y la figura inscrita en el área es igual a ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo menos el construido sobre la mayor, mientras que el círculo es igual a ⟨la **100**
suma de⟩ los otros sectores. Por tanto, el círculo AZHI guarda con la figura inscrita una razón mayor que el cuadrado de lado ΘA con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por ΘA, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado AE, es decir, mayor que ⟨la que guarda⟩ el círculo AZHI con el círculo ϛ. Luego el círculo ϛ es mayor que la figura inscrita [*Elem.* V 10]. Lo cual es imposible, pues era menor.



Luego el círculo ϛ tampoco es menor que el área comprendida por la espiral ABΓΔE y la recta AE. De modo que es igual.

COROLARIO

Por el mismo medio se demostrará también que el área comprendida por la espiral trazada en cualquiera de sus giros y la recta denominada según el mismo numero que el giro, guarda con el círculo denominado según el mismo número que el giro la ⟨misma⟩ razón que la suma del rectángulo comprendido por el radio del círculo del mismo número y el radio del círculo de un número inferior en uno al de los giros más la tercera parte del cuadrado construido sobre el exceso en que excede el radio del círculo mayor de los indicados al radio del círculo menor de los indicados, con el cuadrado construido sobre el radio del círculo mayor de los indicados[70].

PROPOSICIÓN 26

El área comprendida por la espiral menor que la trazada en un giro, que no tenga por extremo el origen de la espiral, y por
102 *las rectas trazadas desde sus extremos hasta el origen de la espiral, guarda con el sector que tiene el radio igual a la mayor de las rectas trazadas desde los extremos hasta el origen de la espiral y el arco que queda entre las rectas indicadas hacia el lado de la espiral, la misma razón que guarda ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por las rectas trazadas desde los extremos hasta el origen de la espiral más la tercera parte del cuadrado construido sobre el exceso en que excede la mayor de las rectas indicadas a la menor con el cuadrado construido sobre la mayor de las rectas que unen los extremos con el origen de la espiral*[71].

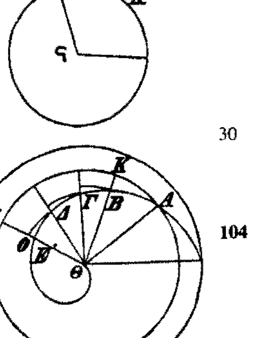
[70] Generalizando el resultado de la proposición, resulta la fórmula $E_n : C_n :: (R_n \times R_{n-1}) + [(R_n - R_{n-1})^2 / 3] :: R_n^2$.

[71] Sea E_s el segmento de espiral menor que un círculo, S el segmento de círculo descrito en la hipótesis y R_1 y R_2 (con $R_1 < R_2$) las rectas trazadas desde

Sea una espiral en la que figura ΑΒΓΔΕ, trazada en menos de un giro, y sean sus extremos Α, Ε, y sea el punto Θ el origen de la espiral, y con centro en Θ y radio ΘΑ trácese un círculo e incida ΘΕ en su circunferencia en el punto Ζ.

Se ha de demostrar que el área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕ y las rectas ΑΘ, ΘΕ guarda con el sector ΑΘΖ la misma razón que guarda la suma del rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΕ más la tercera parte del cuadrado construido sobre ΕΖ, con el cuadrado construido sobre ΘΑ.

Sea un círculo en el que figura ϛΧ el cuadrado de cuyo radio sea igual al rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΕ más la tercera parte del cuadrado construido sobre ΕΖ, y con vértice en su centro un ángulo igual al de vértice en Θ.



El sector ϛΧ guarda con el sector ΘΑΖ la misma razón que el rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΕ más la tercera parte del cuadrado construido sobre ΕΖ con el cuadrado construido sobre ΘΑ, pues los cuadrados construidos sobre sus radios guardan entre
sí esa razón. 104

Se demostrará que el sector Χϛ es igual al área comprendida por la espiral ΑΒΓΔΕ y las rectas ΑΘ, ΘΕ.

Pues si no, es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

Es posible circunscribir al área indicada una figura plana compuesta de sectores semejantes de manera que la figura circunscrita sea mayor que el área indicada en menos que aquello en lo que el sector ϛΧ excede al área indicada [Prop. 23, corol.]. Circunscríbase, y sea ΘΑΚ el mayor de los sectores de que está compuesta, y ΘΟΔ el menor. Así pues, es evidente que la figura

el origen de la espiral que delimitan el segmento de espiral; se pretende demostrar que $E_s : S :: R_1 \times R_2 + [1/3\,(R_2 - R_1)^2] : R_2^2$.

circunscrita es menor que el sector Xς. Trácense las rectas que forman los ángulos iguales con vértice en Θ hasta que incidan en el arco del sector ΘAZ. Entonces hay unas rectas que se exceden entre sí en lo mismo, las que desde Θ cortan a la espiral [Prop. 12], de las cuales ΘA es la mayor y ΘE la menor, y hay otras rectas en número menor en uno que aquéllas, y en magnitud iguales entre sí y a la mayor, las que desde Θ inciden en el arco del sector AΘZ, menos ΘZ, y se han construido sectores semejantes sobre todas las que son iguales entre sí y a la mayor y sobre las que se exceden entre sí en lo mismo, pero no se ha construido ninguno sobre ΘE. Por tanto, los sectores construidos sobre las que son iguales entre sí y a la mayor guardan con los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo menos el sector construido sobre la menor una razón menor que el cuadrado de lado ΘA con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por AΘ, ΘE más la tercera parte del cuadrado
106 de lado EZ [Prop. 11, corol.]. Y el sector ΘAZ es igual a ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales entre sí y a la mayor, mientras que la figura circunscrita lo es a ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden entre sí en lo mismo. Por tanto, el sector ΘAZ guarda con la figura circunscrita una razón menor que el cuadrado de lado ΘA con la suma del rectángulo comprendido por ΘA, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado ZE. Y la razón que guarda el cuadrado de lado ΘA con la suma indicada es la misma que la que guarda el sector ΘAZ con el sector Xς. De modo que el sector Xς es menor que la figura circunscrita [*Elem.* V 10]. Pero no lo es, sino que es mayor.

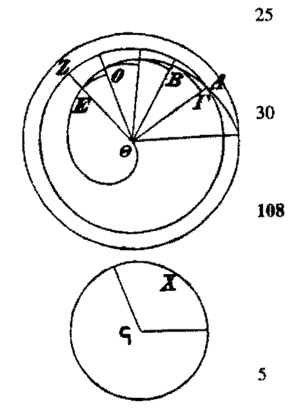
Por tanto, el sector Xς no será mayor que el área comprendida por la espiral ABΓΔE y las rectas AΘ, ΘE.

Y tampoco es menor.

Pues sea menor, y constrúyase lo demás igual.

De nuevo es posible inscribir en el área una figura plana compuesta de sectores semejantes, de manera que el área indicada sea mayor que la figura inscrita en menos que aquello en

lo que esa misma área excede al sector Xς [Prop. 23, corol.]. Inscríbase, y sea ΘBΓ el mayor de los sectores de que se compone la figura inscrita y OΘE el menor.



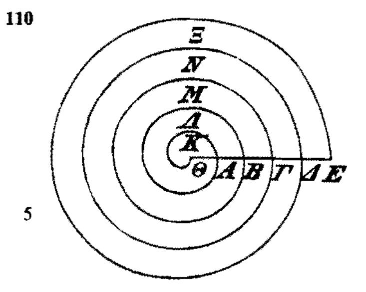
Es evidente, por tanto, que la figura inscrita es mayor que el sector Xς. Por tanto, de nuevo hay ciertas líneas que se exceden unas a otras en lo mismo, las que desde Θ inciden en la espiral [Prop.
12], de las cuales ΘA es la mayor y ΘE 108
la menor, y hay también otras líneas que desde Θ inciden en el arco del sector ΘAZ, excepto la ΘA, en número menores en una que las que se exceden unas a otras en lo mismo y en magnitud iguales entre sí y a la mayor, y sobre cada una se han construido sectores semejantes, pero no se ha construido ⟨ninguno⟩ sobre la mayor de las que se exceden unas a otras en lo mismo. Por tanto, ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que son iguales entre sí y a la mayor guarda con ⟨la suma de⟩ los sectores construidos sobre las que se exceden unas a otras en lo mismo menos el construido sobre la mayor, una razón mayor que el cuadrado de lado ΘA con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por ΘA, ΘE más la tercera parte del cuadrado de lado EZ [Prop. 11, corol.]. De manera que también el sector ΘAZ guarda con la figura inscrita una razón mayor que con el sector Xς. De modo que el sector Xς es mayor que la figura inscrita [*Elem.* V 10]. Pero no lo es, sino que es menor.

Luego el sector Xς tampoco es menor que el área comprendida por la espiral ABΓΔE y las rectas AΘ, ΘE. Luego es igual.

Proposición 27

De las áreas comprendidas por las espirales y las rectas ⟨tomadas en la que es principio⟩ del giro, la tercera es el doble de la segunda; la cuarta, el triple; la quinta, el cuádruple, y así sucesivamente, la siguiente será múltiplo de la segunda según la serie de los números, y la primera área es la sexta parte de la segunda.

Sea la espiral propuesta trazada en su primer giro, en el segundo y en los siguientes en un número cualquiera, y sea el punto Θ el origen de la espiral, y la recta ΘE el principio del
110 giro, y de las áreas sea K la primera, Λ la segunda, M la tercera, N la cuarta, Ξ la quinta.



Se ha de demostrar que el área K es la sexta parte de la siguiente; M el doble de Λ; N el triple de Λ; y la siguiente en la sucesión, múltiplo de Λ según la serie de los números.

Que K es la sexta parte de Λ se demuestra así:

Puesto que se ha demostrado que el área KΛ guarda con el círculo segundo la misma razón que guarda 7 con 12 [Prop. 25][72], el segundo círculo guarda con el primer círculo la razón de 12 a 3, pues está claro. Y el primer círculo guarda con el área K la razón de 3 a 1 [Prop. 24], luego el área K es un sexto de Λ. Y a la vez, se ha demostrado que el área KΛM guarda con el tercer círculo la misma razón que guarda la suma del rectángulo comprendido por ΓΘB más la tercera parte del cuadrado de lado ΓB con el cuadrado de lado ΓΘ [Prop. 25, corol.]. Y el tercer círculo guarda con el segundo círculo la razón del cuadrado de lado ΓΘ al cuadrado de lado ΘB [*Elem.* XII 2], mientras que el segundo círculo guarda con el área KΛ la razón del

[72] En aplicación de *Elem.* XII 2, dado que ΘB = 2ΘA.

cuadrado de lado BΘ con la suma del rectángulo comprendido por BΘ, ΘA más la tercera parte del cuadrado de lado AB [Prop. 25]. Luego también el área ⟨suma de⟩ KΛM guarda con el área ⟨suma de⟩ KΛ la razón de ⟨la suma⟩ del rectángulo comprendido por ΓΘ, ΘB más la tercera parte del cuadrado de lado ΓB con ⟨la suma⟩ del rectángulo comprendido por BΘ, ΘA más la tercera parte del cuadrado de lado AB. Y éstas guardan entre sí la razón de 19 a 7. De manera que también el área KΛM guarda 112
con el área ΛK[73] la misma razón que 19 a 7. Luego la propia área M guarda con el área KΛ la razón de 12 a 7 [*Elem.* V 17]. Y el área KΛ guarda con el área Λ la razón de 7 a 6. Por tanto es evidente que M es el doble de Λ [*Elem.* V 22].

Y se demostrará que las áreas siguientes guardan[74] la razón de los números sucesivos:

Pues el área KΛMNΞ guarda con el círculo cuyo radio es ΘE la misma razón que la que guarda la suma del rectángulo comprendido por EΘ, ΘΔ más la tercera parte del cuadrado de lado ΔE con el cuadrado de lado ΘE [Prop. 25, corol.]. Y el círculo cuyo radio es ΘE guarda con el círculo cuyo radio es ΘΔ la misma razón que el cuadrado de lado ΘE con el cuadrado de lado ΘΔ [*Elem.* XII 2], mientras que el círculo cuyo radio es ΔΘ guarda con el área KΛMN la misma razón que el cuadrado de lado ΘΔ con la suma del rectángulo comprendido por ΘΔ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΔΓ [Prop. 25, corol.]. Por tanto, el área KΛMNΞ guarda con el área KΛMN la razón que guarda ⟨la suma del⟩ rectángulo ΘE, ΘΔ más la tercera parte del cuadrado de lado ΔE con ⟨la suma del⟩ rectángulo ΔΘ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΔΓ. Por descomposición[75], también el área Ξ guarda con el área KΛMN la

[73] Como más atrás, se refiere a las áreas resultantes de la suma de las áreas mencionadas. Las referencias semejantes a éstas que se hacen más adelante en esta misma proposición deben entenderse en el mismo sentido.

[74] Sobreentiéndase «con el área Λ».

[75] Si ciertas magnitudes son proporcionales en composición —es decir, to-

razón del exceso entre ⟨la suma⟩ del rectángulo comprendido por ΕΘ, ΘΔ más la tercera parte del cuadrado de lado ΕΔ y ⟨la suma⟩ del rectángulo comprendido por ΔΘ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΔ con ⟨la suma⟩ del rectángulo
114 comprendido por ΔΘ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΔΓ. Por tanto una suma excede a la otra en lo mismo que el rectángulo comprendido por ΕΘΔ al comprendido por ΔΘΓ, y lo excede en el rectángulo comprendido por ΔΘ, ΓΕ.

Luego el área Ξ guarda con el área ΚΛΜΝ la razón del rectángulo comprendido por ΘΔ, ΓΕ con el comprendido por ΔΘ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΔ.

Por los mismos razonamientos se demostrará también que el área Ν guarda con el área ΚΛΜ la misma razón que el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΒΔ con la suma del rectángulo comprendido por ΓΘΒ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΒ.

Luego el área Ν guarda con el área ΚΛΜΝ la misma razón que el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΒΔ con ⟨la suma del⟩ rectángulo comprendido por ΘΓ, ΒΔ más el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΘΒ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΒ[76]. Y ⟨la suma de⟩ estas áreas[77] es igual a ⟨la suma⟩ del rectángulo comprendido por ΔΘ, ΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΔ. Puesto que el área Ξ guarda con ΚΛΜΝ la misma razón que el rectángulo comprendido por ΘΔ, ΓΕ con la suma del rectángulo ΔΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΔ, y el área ΚΛΜΝ guarda con Ν la razón de la suma del rectángulo ΔΘΓ más la tercera parte del cuadrado de lado ΓΔ con el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΔΒ [*Elem.* V 7, corol.], entonces Ξ guarda con Ν la misma razón que el rectángulo comprendido por ΘΔ, ΓΕ con el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΔΒ [*Elem.* V 22]. Y el rectángulo comprendido

mando la suma del antecedente más el consecuente como una sola magnitud respecto al consecuente—, también lo son al descomponerlas, *cf.* vol I, Introducción, pág. 52.

[76] [*Y lo mismo tomando la proporción invertida*].

[77] Es decir, Κ + Λ + Μ + Ν.

por ΘΔ, ΓΕ guarda con el rectángulo comprendido por ΘΓ, ΔΒ la misma razón que ΘΔ con ΘΓ, puesto que ΓΕ, ΒΔ son iguales.

Está claro por tanto que también Ξ guarda con Ν la misma razón que ΘΔ con ΘΓ.

Del mismo modo se demostrará también que Ν guarda con Μ la misma razón que ΘΓ con ΘΒ, y que Μ guarda con Λ la 116
razón de ΒΘ a ΑΘ. Y las rectas[78] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ están en la razón de los números consecutivos.

Proposición 28

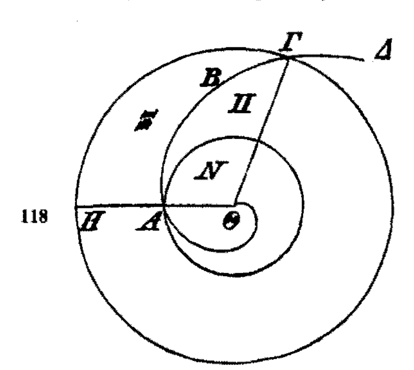
Si en una espiral trazada en cualquiera de sus giros se toman dos puntos que no sean los extremos y desde los puntos tomados se trazan rectas hasta el origen de la espiral, y con centro en el origen de la espiral y radios las rectas trazadas desde los puntos hasta el origen de la espiral se trazan círculos, el área comprendida por el mayor de los arcos de los que están entre las rectas y ⟨el segmento de⟩ la espiral que queda entre esas mismas rectas y la recta prolongada[79] *guardará con el área comprendida por el arco menor y la misma espiral y las rectas que unen sus extremos, la misma razón que el radio del círculo menor más dos tercios del exceso en que excede el radio del círculo mayor al radio del círculo menor, con el radio del círculo menor más un tercio de ese mismo exceso*[80].

[78] [*ΕΘ*].

[79] Falta la indicación de que el radio del círculo menor ha de prolongarse hasta la circunferencia del círculo mayor: ésa sería la «recta prolongada» a que se refiere el texto.

[80] Si llamamos R al radio del círculo mayor, r al radio del círculo menor; S al segmento comprendido por el círculo mayor, la espiral y la prolongación del radio menor; y s al segmento comprendido por la espiral, el arco de círculo menor y la parte del radio mayor comprendida entre el círculo menor y el punto de corte de la espiral y el círculo mayor, se trata de demostrar que S : s :: r + 2/3 (R – r) : r + 1/3 (R – r).

Sea una espiral en la que figura ABΓΔ trazada en un giro, y tómense en ella dos puntos A, Γ de manera que el punto Θ sea el origen de la espiral, y desde A, Γ trácense rectas hasta Θ, y con centro en Θ y con ΘA, ΘΓ como radios trácense círculos.



Se ha de demostrar que el área Ξ guarda con el área Π la misma razón que guarda la
118 suma de AΘ más dos tercios de HA con la suma de AΘ y un tercio de HA.

Se ha demostrado que el área NΠ guarda con el sector HΓΘ la misma razón que guarda ⟨la suma del> rectángulo comprendido por HΘ, AΘ más la tercera parte del cuadrado de lado AH con el cuadrado de lado HΘ [Prop. 26]. Luego la propia área Ξ guarda con el área NΠ la misma razón que el rectángulo ΘAH más dos tercios del cuadrado de lado HA con la suma del rectángulo comprendido por AΘH más la tercera parte del cuadrado de lado HA. Y puesto que el área NΠ guarda con el sector NΠΞ la misma razón que la suma del rectángulo comprendido por ΘA, ΘH más la tercera parte del cuadrado de lado HA con el cuadrado de lado ΘH, mientras que el sector NΠΞ guarda con el sector N la misma razón que el cuadrado de lado ΘH con el cuadrado de lado ΘA, entonces también el área NΠ guardará con el área N la misma razón que guarda la suma del rectángulo comprendido por ΘA, ΘH más la tercera parte del cuadrado de lado HA con el cuadrado de lado ΘA [*Elem.* V 22]. Por tanto el área NΠ guarda con el área Π la razón que guarda la suma del rectángulo comprendido por HΘA más la tercera parte del cuadrado de lado HA con la suma del rectángulo comprendido por HA, ΘA más la tercera parte del cuadrado de lado HA. Entonces, puesto que el área Ξ guarda con el área NΠ la misma razón que guarda

la suma del rectángulo comprendido por ΘAH más dos tercios
del cuadrado de lado HA con la suma del rectángulo compren- 120
dido por HΘA más la tercera parte del cuadrado de lado HA, mientras que el área NΠ guarda con el área Π la misma razón que la suma del rectángulo comprendido por HΘA más la tercera parte del cuadrado de lado HA con la suma del rectángulo comprendido por HAΘ más la tercera parte del cuadrado de lado HA [*Elem.* V 22], entonces también Ξ guardará con Π la misma razón que guarda la suma del rectángulo ΘAH más dos tercios del cuadrado de lado HA con la suma del rectángulo comprendido por ΘAH más la tercera parte del cuadrado de lado HA. Y la suma del rectángulo comprendido por ΘAH más dos tercios del cuadrado de lado HA guarda con la suma del rectángulo comprendido por ΘAH más la tercera parte del cuadrado de lado HA la misma razón que guarda la suma de la recta ΘA más dos tercios de la HA, con la suma de la recta ΘA más la tercera parte de la HA.

Es evidente por tanto que también el área Ξ guarda con el área Π la misma razón que la suma de la recta ΘA más dos tercios de la recta HA con la suma de la recta ΘA más la tercera parte de la recta HA.

SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS FIGURAS PLANAS O LOS CENTROS DE GRAVEDAD DE LAS FIGURAS PLANAS

INTRODUCCIÓN

Con los dos libros *Sobre el equilibrio de las figuras planas* se inicia para la cultura occidental la física matemática, pues contiene el primer caso de aplicación sistemática de los conocimientos geométricos al mundo material. La alternativa metodológica que supuso esta obra queda puesta de relieve cuando la comparamos con los desarrollos previos de la mecánica y la física en el mundo griego. El método empleado por Arquímedes, puramente matemático, no tiene nada que ver con las anteriores líneas de desarrollo de la Mecánica griega, a las que tenemos acceso mediante las noticias sobre las construcciones instrumentales de Arquitas, el enfoque puramente racional y teórico que se plasma en la *Física* aristotélica o la observación curiosa y las explicaciones ingenuas de la *Mecánica* pseudo-aristotélica[1].

[1] Son varios los problemas de esta última obra que se ocupan de asuntos relacionados con el equilibrio, la balanza y la palanca —de la que se dice que «viene a ser una balanza que tiene abajo el soporte y dividida en partes desiguales» (850a 34-35)—. En concreto, el tratadista afirma en el problema 3 que, en el funcionamiento de la palanca, «están en proporción inversa el peso movido respecto al que mueve y la longitud respecto a la longitud», anticipación de lo que se considera la aportación fundamental de Arquímedes en el presente tratado.

Para la contribución más señalada de Arquitas a la matemática y la mecánica —su solución del problema délico—, *cf.* vol. I, págs. 376-378; la *Física* y la *Mecánica* mencionadas están traducidas en esta misma colección, respectivamente BCG 203 y BCG 277.

El tratado no contiene definiciones, verdadera anomalía respecto a la forma canónica del tratado matemático, como se puede ver en los *Elementos* de Euclides, en los restantes tratados de Arquímedes y en la obra de Apolonio. También Eutocio, cuando comentó la obra a principios del siglo VI, ya las echó en falta; por eso al principio de su *Comentario* (264, 10-15) se cree en la necesidad de aclarar: «Arquímedes en este libro considera centro de inclinación[2] de una ⟨figura⟩ plana al punto colgada del cual permanece paralela al horizonte, y centro de peso o de gravedad al punto colgada del cual la balanza está paralela al horizonte».

La ausencia de definiciones ha servido de argumento para afirmar que el Libro I del *Equilibrio de las figuras planas* puede ser una forma abreviada de alguna otra de las obras no conservadas de Arquímedes sobre estas mismas cuestiones, pues él mismo menciona repetidamente títulos de trabajos no conservados —*Elementos de Mecánica* y *Equilibrios*[3]— que podrían referirse a otra u otras obras sobre mecánica, como sostuvieron Heath y Heiberg. Basándose en ese planteamiento, A. G. Drachmann[4] estudió los textos sobre mecánica de Herón y Papo y, comparándolos entre sí y con los datos de otras fuentes, intentó entresacar la parte de los mismos que tiene su origen en Arquímedes. Por ese medio llegó a la conclusión de que debieron de ser tres las obras perdidas de Arquímedes sobre estas cuestiones: una sobre los centros de gravedad, relacionada con el Libro I del *Equilibrio de las figuras planas*, otra sobre las balanzas —cuyo título se nos ha conservado en griego —*Perì zygôn*—, y una tercera, sobre los apoyos, mencionada solamente por Herón. Otros autores —Toeplitz, Stein, Dijksterhuis— entienden que también cabe que las definiciones —«centro de gravedad», «peso», «estar en equilibrio»— sean otras tantas incógnitas para cuya resolución los postulados sirven como ecuación. Dijksterhuis, en concreto, propone la explicación de que Arquímedes tenía en mente una balanza ideal, que él veía mentalmente inclinada o en equilibrio por obra de pesos (en forma de figuras planimétricas) colgados de ella, de tal modo que los postulados no contienen sino la formulación de los resultados de las observaciones más simples que estaba en su mano hacer bajo esa óptica, y que la claridad de las imágenes así obtenidas anuló el deseo de ofrecer definiciones abstractas de los términos empleados[5].

J. L. Berggren[6] no hace especial hincapié en ese hecho, pero, aplicándose a la estructura, estilo y contenido del Libro I, duda de la autoría de Arquímedes para el mismo, al menos en la presente forma. Aunque su postura resulta chocante por la divergencia manifiesta con la de otros tratadistas, merece la pena presentar al menos los datos más significativos que expone. En primer lugar, lo que Heiberg edita como postulados y proposiciones 1 y 2 no presenta numeración en los manuscritos —que dan el número 1 a lo que Heiberg llama proposición 3—, y las referencias de Eutocio coinciden con las de la tradición —es decir, Eutocio llama proposición 4 a la que los manuscritos llaman proposición 4—; el carácter introductorio de esa parte inicial le hace pensar que se trata de un simple prefacio introducido en el texto por un compilador. Además, el análisis de la conexión lógica entre los postulados y las demostraciones hace ver que los postulados 2 y 3 no se utilizan en absoluto en las demostraciones; el contraste a ese respecto entre la presente obra y el tratado *Sobre las líneas espirales* deja patente la anomalía. En

[2] Designado con la expresión *kéntron rhopês* —referida al movimiento inducido por la gravedad que desplaza el cuerpo hacia abajo—, frente a la expresión *kéntron báreos* («centro de gravedad») que usa Arquímedes.

[3] Cita esos títulos en *Cuerpos Flotantes* II 2 (respectivamente en 350, 14 y 350, 21-22); en *Método* I (438, 2) se refiere a obras sobre el mismo tema llamándolos «los libros sobre el equilibrio».

[4] «Fragments from Archimedes in Heron's Mechanics», *Centaurus* 8 (1963) 91-146.

[5] *Cf.* DIJKSTERHUIS, *op. cit.*, págs. 294-298.

[6] «Spurious Theorems in Archimedes' Equilibrium of Planes: Book I», *Archiv for History of Exact Sciences* 16 (1976) 87-103.

cuanto a la prueba de la ley de la palanca en las proposiciones 6 y 7, de cuyas dificultades haremos mención más adelante, Berggren trae a colación dos testimonios, el *Liber de Canonio* y un texto en árabe que lleva por título *Libro de Euclides sobre la balanza*, textos ambos que contienen la afirmación de que esta ley ya había sido probada por Euclides. Basándose en todo ello, Berggren llega a afirmar que «su forma presente es la de un texto escolar», y que, en su opinión, «no es una obra auténtica de Arquímedes». El último aserto parece excesivo, teniendo en cuenta que el Libro I está bien documentado en la tradición manuscrita, pero sus argumentos, densos, pero claros y concisos, no dejan de ser convincentes. Caso de ser cierta su suposición, hay que situar la refección del Libro I en fecha anterior a la de Eutocio, pues éste lo conoció en la misma forma que nosotros. Para el Libro II entiende que «presenta todos los signos de ser un buen texto de origen auténticamente arquimedeo»

Sea lo que sea de esta cuestión de autenticidad, tal y como nos ha llegado el tratado, el Libro I se abre con siete postulados cuya calidad de tales ya fue puesta en duda en época antigua; Eutocio nos transmite la noticia de que Gémino reclamaba que Arquímedes había llamado «postulados» a los «axiomas», pues «que los pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio es un axioma, igual que lo de después»; Proclo se expresa en el mismo sentido: «Arquímedes al empezar los *Equilibrios* dice: "Postulamos que los pesos iguales están en equilibrio a distancias iguales". Sin embargo, cualquiera llamaría a eso un axioma»[7].

Tras los postulados vienen quince proposiciones en las que haciendo uso de una balanza ideal que nunca menciona y considerando unas figuras planas que son en realidad sólidos aplanados de densidad homogénea, prueba que los pesos en equilibrio a distancias iguales son iguales (prop. 1), que los pesos desiguales a distancias iguales no están en equilibrio, sino que

[7] Eutocio, *Com. al Libro I del Equilibrio de las figuras planas*, 266 1-5; Proclo, *In Euclidis*, 181, 18.

se producirá una inclinación hacia el mayor (prop. 2) y que los pesos desiguales a distancias desiguales estarán en equilibrio con el peso mayor pendiente de la distancia menor (prop. 3). En las dos proposiciones siguientes se determinan los centros de gravedad de la suma de dos y tres magnitudes iguales; siguen dos corolarios que generalizan estos resultados para números pares e impares de magnitudes.

La proposición 6 contiene lo que se considera el más importante de los resultados obtenidos por Arquímedes: la proporción inversa entre los brazos de la balanza en equilibrio y los pesos de las magnitudes conmensurables correspondientes (en la prop. 7 extiende la demostración al caso de las magnitudes inconmensurables). El argumento empleado para demostrar la tesis propuesta en esta proposición, fundamental no sólo para el desarrollo de lo expuesto en este tratado, sino también en *Sobre los cuerpos flotantes*, fue considerado un paralogismo por el historiador de la mecánica E. Mach; Dijksterhuis, cuyo razonamiento viene siendo admitido unánimemente, opone que Arquímedes basó esta prueba en la premisa de que la influencia de un peso suspendido de una balanza en equilibrio depende del peso del cuerpo y de la posición de su centro de gravedad, premisa que había explicitado en su postulado 6, en donde había afirmado que el equilibrio de la balanza no se altera si los pesos suspendidos de ella son sustituidos por otros pesos iguales a los primeros y suspendidos de los mismos lugares[8].

En la prop. 8 determina el centro de gravedad de una magnitud de la que se resta una parte, y en las siguientes proposiciones, hasta el final del tratado, se investigan los centros de gravedad del triángulo, el paralelogramo y el trapecio.

Si al Libro I le cuadra bien el título por el que hoy lo conocemos, al Libro II, sin embargo, le iría mejor el de «Equilibrio del segmento parabólico», pues el tratado entero se consagra a esa

[8] *Cf.* Dijksterhuis, *op. cit.*, págs. 289-304, donde analiza y critica ampliamente los argumentos relativos a estos debates.

cuestión. Da la sensación de que estos estudios de Arquímedes sobre problemas de equilibrio estuvieron en estrecha relación con la intuición del resultado de la cuadratura de la parábola, lo que luego se convertiría en su afamado *Método*, y que a partir de ahí se le abrieron las puertas para estudios relacionados, primero, con otros fenómenos relativos a los sólidos generados por la revolución de las cónicas y, después, a los grandes descubrimientos sobre la esfera y el cilindro, hallazgos que constituyen lo fundamental de los tratados *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre conoides y esferoides* y *Sobre los cuerpos flotantes*, aunque las conclusiones que podemos obtener de ello no nos permitan más que separar en el tiempo la redacción del Libro I y el Libro II de este tratado, como ya vieron Heath, Claggett y Dijksterhuis[9].

En el Libro II, mediante investigaciones parciales, entre las que se señalan metodológicamente las relativas al centro de gravedad de la figura rectilínea formada por el triángulo inscrito en el segmento parabólico y los triángulos repetidamente inscritos en las áreas restantes —lo que Arquímedes llama «figura rectilínea inscrita propiamente»—, la demostración de que el centro de gravedad del segmento parabólico se encuentra sobre su diámetro y la de que los centros de gravedad de dos segmentos parabólicos semejantes cortan a los diámetros de los mismos en la misma razón, Arquímedes se va aproximando a lo que ha de ser el culmen del tratado: la prop. 8, en la que se prueba que el centro de gravedad del segmento parabólico corta al diámetro del segmento de modo que la parte de éste que está hacia el vértice del segmento es una vez y media la parte del mismo que está hacia la base. Con las proposiciones 9 y 10, la primera de ellas con carácter de lema y fama de ser uno de los pasajes más ásperos de lectura en toda la literatura matemática griega, y la segunda destinada a la determinación del centro de gravedad del tronco de segmento parabólico, se cierra el tratado, al que Ver Eecke calificó de «principal título de Arquímedes para entrar en la inmortalidad».

[9] *Cf.* vol. I, págs. 25-33.

LIBRO I II 124

1. Postulamos que los pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, y que los pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que el de mayor longitud se inclina hacia el peso.

2. Y que, si estando en equilibrio unos pesos a ciertas distancias, se incrementa uno de los pesos, no mantienen el equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso al que se le añadió algo.

3. E igualmente, que si de uno de los pesos se quita algo, no mantienen el equilibrio, sino que se inclina hacia el peso del que no se quitó nada.

4. Y que si las figuras planas iguales y semejantes se hacen coincidir una con otra, también los centros de gravedad coinciden uno con otro.

5. En las figuras desiguales pero semejantes los centros de gravedad estarán dispuestos de modo semejante. Y afirmamos que unos puntos están dispuestos de manera semejante en figuras semejantes cuando al trazar desde ellos rectas hacia los ángulos iguales forman ángulos iguales con los lados homólogos.

6. Si unas magnitudes están en equilibrio a ciertas distancias, también las iguales a ellas estarán en equilibrio a las mismas distancias.

7. En toda figura cuyo perímetro es cóncavo hacia el mismo 126
lado, es de necesidad que el centro de gravedad esté dentro de la figura.

Supuesto esto

Proposición 1

Los pesos en equilibrio a distancias iguales son iguales.

Pues si fueran desiguales, al quitar del mayor el exceso, los resultantes no estarán en equilibrio, puesto que estando en equilibrio se ha quitado algo de uno de ellos [Post. 3].

De manera que los pesos en equilibrio a distancias iguales son iguales.

Proposición 2

Los pesos desiguales a distancias iguales no están en equilibrio, sino que se inclinarán hacia el mayor.

Pues al quitar el exceso estarán en equilibrio, dado que los pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio [Post. 1]. Entonces, al añadir lo quitado se inclinará hacia el mayor, puesto que estando en equilibrio se ha incrementado uno de los dos [Post. 2].

Proposición 3

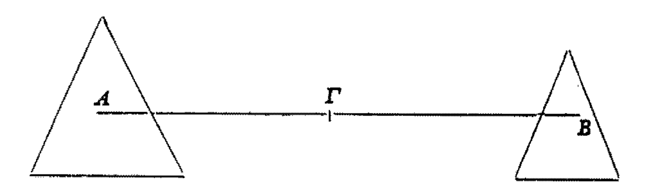
Los pesos desiguales a distancias desiguales estarán en equilibrio, y el mayor peso ⟨penderá⟩ de la distancia menor.

Sean A, B pesos desiguales y sea A el mayor y estén en equilibrio a las distancias ΑΓ, ΓΒ.

Se ha de demostrar que ΑΓ es menor que ΓΒ.

Pues no sea menor.

Si se quita el exceso en que A excede a B, se inclinará hacia B,
puesto que se ha quitado de uno de ellos cuando estaban en equi- 128
librio [Post. 3]. Pero no se inclinará. Pues o bien, si ΓΑ es igual a

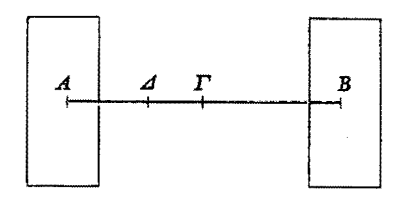


ΓΒ, estarán en equilibrio[1] [Post. 1], o bien, si ΓΑ es mayor que ΓΒ, se inclina hacia A, pues los pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el que pende de la distancia mayor [Post. 1]. Por eso ΑΓ es menor que ΓΒ.

Y también es evidente que los pesos que están en equilibrio a distancias desiguales son desiguales, y es mayor el que pende de la distancia menor.

Proposición 4

Si dos magnitudes iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las magnitudes será el centro de gravedad de la magnitud compuesta de ambas magnitudes[2].



[1] [*Los pesos iguales a distancias iguales*].

[2] Arquímedes era consciente de que no sólo importan las magnitudes consideradas, sino también el punto del que están suspendidas.

Sea A el centro de gravedad de la magnitud A, y B el de B, y una vez trazada la recta AB córtesela por el punto Γ.

Digo que Γ es el centro ⟨de gravedad⟩ de la magnitud compuesta de ambas magnitudes.

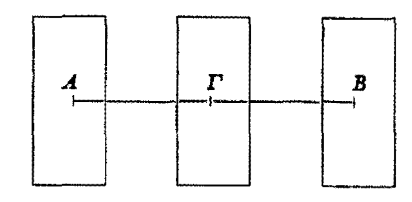
Pues si no, sea Δ el centro de gravedad[3], si es posible[4].

Puesto que el punto Δ es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de las magnitudes A, B, sostenida en Δ estará en equilibrio. Luego las magnitudes A, B, estarán en equilibrio a las distancias AΔ, ΔB. Lo cual es imposible [Post. 1][5].

130 Por tanto es evidente que Γ es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de las magnitudes A, B.

Proposición 5

Si los centros de gravedad de tres magnitudes están dispuestos en línea recta y las magnitudes tienen el mismo peso, las rectas entre los centros también son iguales y el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes será el mismo punto que también es centro de gravedad de la magnitud de la posición central.



Sean A, B, Γ tres magnitudes, y sus centros de gravedad los puntos A, B, Γ dispuestos en línea recta, y sean A, B, Γ iguales y sean AΓ, ΓB rectas iguales.

[3] *[De la compuesta de las dos magnitudes A, B].*

[4] *[Pues ya se ha demostrado antes que está en la recta AB].*

[5] *[Pues las magnitudes iguales no están en equilibrio a distancias desiguales].*

Digo que el punto Γ es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes.

Puesto que las magnitudes A, B tienen el mismo peso, el punto Γ será su centro de gravedad, ya que AΓ, ΓB son iguales [Prop. 4]. Y el punto Γ es el centro de gravedad de Γ.

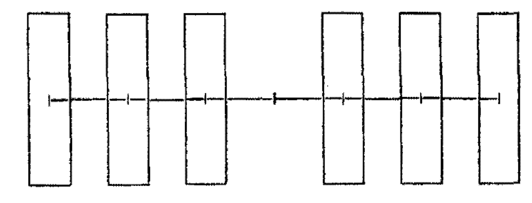
Luego también es evidente que el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes será el punto que también es centro de gravedad de la magnitud de la posición central.

Corolario 1

A partir de esto está claro que si los centros de gravedad de un número impar de magnitudes están dispuestos en línea recta y si las magnitudes que distan lo mismo de la que está en el centro tienen el mismo peso, también las rectas que están entre **132**
los centros ⟨de gravedad⟩ son iguales, y el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes será el punto que también es centro de gravedad de la magnitud de la posición central.

Corolario 2

Y si las magnitudes están en número par y sus centros de gravedad están en línea recta y las que están en la posición cen-



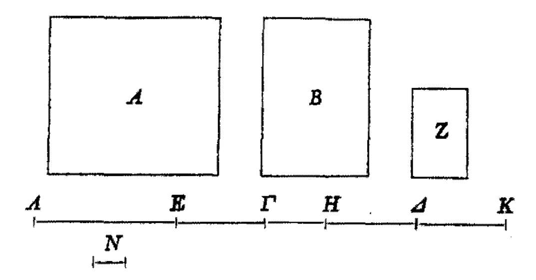
tral y las que distan lo mismo de ellas tienen el mismo peso, también las rectas que están entre los centros ⟨de gravedad⟩ son

iguales y el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes será el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las magnitudes como está escrito más adelante.

Proposición 6

Las magnitudes conmensurables están en equilibrio a distancias que guardan la razón inversa de la de los pesos.

Sean A, B magnitudes conmensurables cuyos centros de gravedad son A, B y sea EΔ una distancia, y sea A a B como la longitud ΔΓ a la longitud ΓE.



Se ha de demostrar que Γ es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de ambas magnitudes A, B.

Puesto que A es a B como la longitud ΔΓ a la ΓE y A es conmensurable con B, entonces también ΓΔ es conmensurable con ΓE, es decir, la recta con la recta [*Elem.* X 11], de modo que hay una medida común a EΓ, ΓΔ. Sea N, y pónganse cada una de las rectas ΔH, ΔK iguales a EΓ, y EΛ igual a ΔΓ. Y puesto que ΔH
134 es igual a ΓE, también ΔΓ es igual a EH. De manera que también ΛE es igual a EH. Luego ΛH es el doble de ΔΓ y HK el de ΓE. De manera que N mide a cada una de las rectas ΛH, HK, puesto que mide a sus mitades [*Elem.* X 12]. Y puesto que A es a B como ΔΓ a ΓE, mientras que ΔΓ es a ΓE como ΛH a HK

—puesto que cada una es el doble de cada una—, por tanto también A es a B como ΛH a HK. Sea A múltiplo de Z tantas veces cuantas lo es ΛH de N. Entonces ΛH es a N como A a Z [*Elem.* V, def. 5]. Y también KH es a ΛH como B a A. Por tanto, *ex aequali*[6], KH es a N como B a Z. Por tanto KH es múltiplo de N tantas veces como B de Z. Y se había demostrado que también A era múltiplo de Z, de manera que Z es medida común de A, B. Dividida ΛH en rectas iguales a N y A en partes iguales a Z, los segmentos de ΛH iguales en magnitud a N serán iguales en número a los segmentos de A que son iguales a Z. De manera que si en cada uno de los segmentos de ΛH se pone una magnitud igual a Z con su centro de gravedad en la mitad del segmento, la suma de todas de las magnitudes es igual a A, y el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas ellas será el punto E. Pues todas las magnitudes son pares en número y las que están por cada lado de E son iguales en número por ser igual ΛE a HE.

De la misma manera se demostrará que también si en cada **136**
uno de los segmentos de KH se pone una magnitud igual a Z con su centro de gravedad en la mitad del segmento, la suma de todas las magnitudes será igual a B y el centro de gravedad de la ⟨magnitud⟩ compuesta de todas ellas será el punto Δ. Por tanto, A estará puesto sobre E y B sobre Δ. Y entonces habrá unas magnitudes en número par, iguales entre sí, dispuestas en línea recta, cuyos centros de gravedad distan entre sí lo mismo. Y es evidente que el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas ellas es el punto medio de la recta que contiene los centros ⟨de gravedad⟩ de las magnitudes que están en el centro. Y puesto que ΛE es igual a ΓΔ y EΓ igual a ΔK, entonces la recta entera ΛΓ es igual a la ΓK. De manera que el punto Γ es el centro de gravedad de la ⟨magnitud compuesta⟩ de todas.

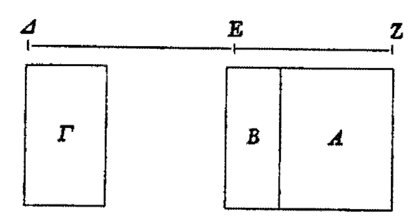
[6] Dada una serie proporcional, tomar una proporción *ex aequali* consiste en tomar los extremos con omisión de los medios; *cf.* vol. I, Introducción, págs. 52-53.

Luego si A está situado en E y B en Δ, estarán en equilibrio en Γ[7].

Proposición 7

Y también, de modo semejante, si las magnitudes son inconmensurables, estarán en equilibrio a distancias que guarden la razón inversa de las magnitudes.

Sean AB, Γ magnitudes inconmensurables, y ΔE, EZ las distancias, y guarde AB con Γ la misma razón que la distancia EΔ con la EZ.



Digo que E es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de la suma de las dos magnitudes AB, Γ.

26 Pues si AB puesto en Z no está en equilibrio con Γ puesto en Δ, o bien AB es demasiado grande para estar en equilibrio con Γ, o no.

138 Sea demasiado grande, y quítese de AB una magnitud menor que el exceso en que AB es demasiado grande para estar en equilibrio con Γ de modo que la magnitud restante A sea conmensurable con Γ.

Puesto que las magnitudes A, Γ son conmensurables y A guarda con Γ una razón menor que ΔE con EZ, las magnitudes A, Γ no estarán en equilibrio a las distancias ΔE, EZ, puesto A en Z y Γ en Δ [Prop. 6].

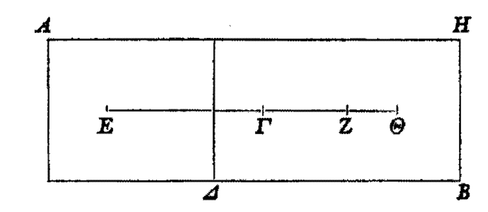
[7] Es decir, «con el punto Γ como fulcro».

Por la misma razón, tampoco ocurrirá eso si Γ es demasiado grande para estar en equilibrio con AB[8].

Proposición 8

Si de una magnitud se quita una magnitud que no tenga el mismo centro que la magnitud entera, una vez prolongada la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y de la restada hacia el lado en que está el centro de la magnitud entera, y tomada una parte de la prolongación de la recta que une los centros indicados de modo que ⟨esa parte⟩ guarde con la recta que está entre los centros la misma razón que la que guarda el peso de la magnitud quitada con el peso de la restante, el centro de gravedad de la magnitud restante será el extremo de la recta tomada.

Sea Γ el centro de gravedad de una magnitud AB, y quítese de AB la magnitud AΔ, cuyo centro de gravedad sea E, y una vez trazada y prolongada la recta EΓ, tómese ΓZ de modo que 140
guarde con ΓE la misma razón que la magnitud AΔ con la ΔH.



[8] La prueba ha sido repetidamente considerada oscura e imperfecta; Heiberg la completa en el sentido siguiente: puesto que A : Γ< ΔE : EZ, se inclinará hacia el punto Δ, lo cual es imposible, puesto que de AB se ha quitado menos del exceso. En el caso de que Γ sea mayor, debemos seguir el mismo razonamiento; y entonces, puesto que AB no es ni mayor ni menor, la proposición queda probada.

Se ha de demostrar que el punto Z es el centro de gravedad de la magnitud ΔH.

Pues no sea así, sino, si es posible, el punto Θ.

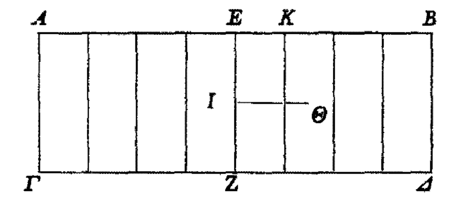
Puesto que E es el centro de gravedad de la magnitud AΔ y el punto Θ el de ΔH, el centro de gravedad de la magnitud suma de las dos AΔ, ΔH estará sobre la recta EΘ una vez cortada de manera que sus segmentos guarden la proporción inversa de la que guardan las magnitudes ⟨pero el punto Γ se encuentra en la recta EZ cortada de tal modo que sus segmentos están en proporción inversa con las magnitudes[9]⟩. De manera que el punto Γ no estará en el punto de corte correspondiente al indicado. De modo que el punto Γ no será el centro ⟨de gravedad⟩ de la magnitud compuesta por las magnitudes AΔ, ΔH, es decir, de la AB. Pero lo es, porque así se había supuesto.

Luego el punto Θ no es el centro de gravedad de la magnitud ΔH.

Proposición 9

En todo paralelogramo, el centro de gravedad está situado en la recta que une los puntos medios de los lados opuestos entre sí del paralelogramo.

Sea el paralelogramo ABΓΔ, y trácese EZ entre los puntos medios de AB, ΓΔ.



[9] Heiberg entiende que existe una laguna en el texto, y la suple con lo que figura entre corchetes angulares.

Digo que el centro de gravedad del paralelogramo ABΓΔ estará en la recta EZ.

Pues no lo sea, sino que, si es posible, sea Θ, y trácese ΘI 142
paralela a AB. Si se corta sucesivamente por la mitad EB, la recta restante será menor que IΘ. Y divídanse cada una de las rectas AE, EB en rectas iguales a EK, y desde los puntos de corte trácense paralelas a EZ.

El paralelogramo entero quedará dividido en paralelogramos iguales y semejantes al KZ[10]. Entonces, si se hacen coincidir unos con otros los paralelogramos iguales y semejantes al KZ, también los centros de gravedad coincidirán unos con otros [Post. 4]. Y habrá unas magnitudes —los paralelogramos iguales al KZ— pares en número y sus centros de gravedad estarán situados en una recta, y las magnitudes que están en el centro y todas las que están por cada lado de las del centro son ellas mismas iguales y las rectas que están entre los centros de gravedad son iguales. Luego el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas ellas estará en la recta que une los centros de gravedad de las áreas que están en el centro [Prop. 5, corol. 2]. Pero no lo está, pues el punto Θ está fuera de los paralelogramos que están en el centro.

Por tanto es evidente que el centro de gravedad del paralelogramo ABΓΔ está en la recta EZ.

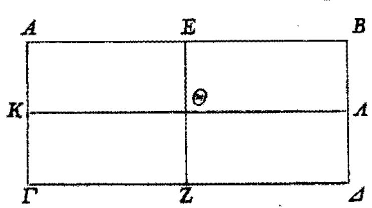
Proposición 10

El centro de gravedad de todo paralelogramo es el punto en que se cortan las diagonales.

Sea el paralelogramo ABΓΔ y en él la recta EZ que corta por la mitad a los lados AB, ΓΔ y la recta KΛ que corta por la mitad a las rectas AΓ, BΔ.

[10] Es decir, «al de diagonal KZ».

Y el centro de gravedad del paralelogramo ABΓΔ está en la
144 recta EZ —pues eso se ha demostrado [Prop. 9]—. Por la mis-



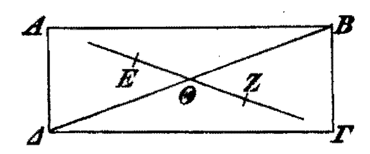
ma razón, está también en la recta KΛ. Luego el punto Θ es el centro de gravedad. Y las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto Θ.

De modo que queda demostrado lo propuesto.

DE OTRA MANERA

Cabe también demostrar lo mismo de otra manera.

Sea el paralelogramo ABΓΔ y sea ΔB su diagonal.



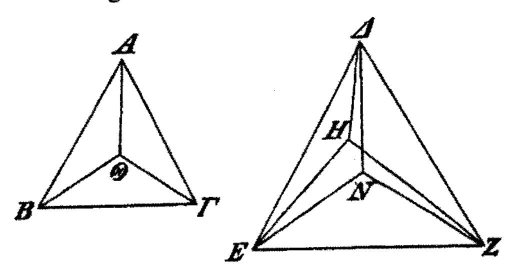
Entonces los triángulos ABΔ, BΔΓ son iguales y semejantes entre sí [*Elem.* I 34]. De modo que si se hacen coincidir los triángulos uno con otro también sus centros de gravedad coincidirán uno con otro [Post. 4]. Sea el punto E el centro de gravedad del triángulo ABΔ y córtese por la mitad el lado ΔB por el punto Θ y trácese EΘ y prolónguese y tómese ZΘ igual a ΘE. Si se aplica el triángulo ABΔ al triángulo BΔΓ y se coloca el lado AB sobre el ΔΓ y el AΔ sobre el BΓ, coincidirá también la recta ΘE sobre la ZΘ y el punto E caerá sobre el punto Z. Y también sobre el centro de gravedad del triángulo BΔΓ [Post. 4].

⟨Así el punto Z es el centro de gravedad del triángulo BΔΓ[11]⟩. Puesto que el punto E es el centro de gravedad del triángulo
ABΔ y el punto Z el del ΔBΓ, es evidente que el centro de gra-
vedad de la magnitud compuesta por ambos triángulos es el 146
punto medio de la recta EZ, que es precisamente el punto Θ.

Proposición 11

Si hay dos triángulos semejantes entre sí y en ellos puntos dispuestos de manera semejante respecto a los triángulos y un punto es el centro de gravedad del triángulo en el que está, también el punto restante es el centro de gravedad del triángulo en el que está[12].

Sean dos triángulos ABΓ, ΔEZ, y sea AΓ a ΔZ como AB a 12
ΔE y como BΓ a EZ, y sean Θ, N puntos dispuestos de manera semejante en los triángulos indicados[13], y sea Θ el centro de gravedad del triángulo ABΓ.



[11] Heiberg, considerando que Arquímedes no hubiera dejado de incluir esta conclusión en el razonamiento, introduce esta frase en la versión latina y reconstruye su texto griego.

[12] [*Decimos que unos puntos están dispuestos de manera semejante respecto a figuras semejantes cuando las rectas trazadas desde ellos hacia los ángulos iguales forman ángulos iguales con los lados homólogos*].

[13] [*Respecto a los triángulos ABΓ, ΔEZ*].

Digo que también el punto N es el centro de gravedad del **triángulo** ΔEZ.

Pues no lo sea, sino que, si es posible, sea H el centro de **gravedad** del triángulo ΔEZ, y trácense ΘA, ΘB, ΘΓ, ΔN, EN, ZN, ΔH, EH, ZH.

Puesto que el triángulo ABΓ es semejante al triángulo ΔEZ y los puntos Θ, H son los centros de gravedad y puesto que los centros de gravedad de las figuras semejantes están dispuestos de manera semejante[14] [Post. 5], entonces el ángulo correspondiente a HΔE es igual al correspondiente a ΘAB. Pero el ángulo comprendido por ΘAB es igual al comprendido por EΔN[15].
148 Por tanto también el ángulo comprendido por EΔN es igual al comprendido por EΔH, el mayor al menor. Lo cual es imposible. Así que no es posible que el punto N no sea el centro de gravedad del triángulo ΔEZ. Luego lo es.

Proposición 12

Si hay dos triángulos semejantes y el centro de gravedad de un triángulo está en la recta que ha sido trazada desde un ángulo hasta el punto medio de la base[16]*, también el centro de gravedad del triángulo restante está en la recta trazada de modo semejante.*

Sean ABΓ, ΔEZ dos triángulos y sea AΓ a ΔZ como AB a ΔE y como BΓ a ZE [*Elem.* VI 4], y una vez cortada AΓ por la mitad por el punto H, trácese BH, y esté el punto Θ, centro de gravedad del triángulo ABΓ, en la recta BH.

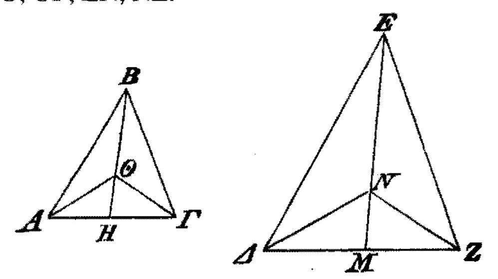
Digo que el centro de gravedad del triángulo EΔZ está en la recta trazada de manera semejante.

[14] [*De modo que formen ángulos iguales con los lados homólogos cada uno con cada ⟨par de lados⟩*].

[15] [*Porque los puntos Θ, N están dispuestos de manera semejante*].

[16] Ha de entenderse que se refiere al lado opuesto al ángulo en cuestión.

Córtese la recta ΔZ por la mitad por el punto M y trácese EM, y hágase que la recta BH sea a BΘ como ME a EN, y trácense AΘ, ΘΓ, ΔN, NZ.



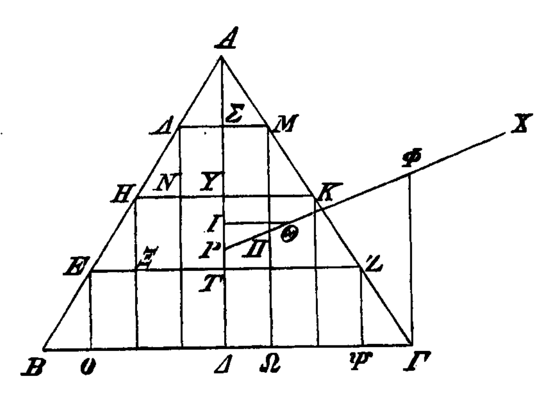
Puesto que AH es la mitad de ΓA y ΔM la mitad de ΔZ, entonces también BA es a EΔ como AH a ΔM. Y los lados que 150
comprenden ángulos iguales son proporcionales. Luego el ángulo AHB es igual al ΔME [*Elem.* VI 6], y AH es a ΔM como BH a EM [*Elem.* VI 4]. Y también BH es a BΘ como ME a EN. Y entonces, *ex aequali*, AB es a ΔE como BΘ a EN. Y los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales. Y si esto es así, el ángulo BAΘ es igual al EΔN [*Elem.* VI 6]. De manera que también el ángulo restante ΘAΓ es igual al ángulo NΔZ. Por la misma razón, el ángulo BΓΘ es igual al EZN y el ΘΓH igual al NZM. Y se había demostrado también que el ABΘ era igual al ΔEM. De manera que también el ángulo restante ΘBΓ es igual al NEZ. Por todas estas razones los puntos Θ, N están dispuestos de manera semejante[17]. Así pues, dado que los puntos Θ, N están dispuestos de manera semejante y Θ es el centro de gravedad del triángulo ABΓ, entonces también el punto N es el centro de gravedad del triángulo ΔEZ [Prop. 11].

[17] [*Forman ángulos iguales con los lados homólogos*].

Proposición 13

En todo triángulo, el centro de gravedad está en la recta que se traza desde el ángulo hasta el centro de la base[18].

Sea el triángulo ΑΒΓ y en él la recta ΑΔ hasta el punto medio de la base ΒΓ.



Se ha demostrar que el centro de gravedad del triángulo ΑΒΓ está en la recta ΑΔ.

152 Pues no sea así, sino, si es posible, sea el punto Θ, y por él trácese ΘΙ paralela a ΒΓ. Cortando sucesivamente por la mitad ΔΓ en algún momento la recta restante será menor que ΘΙ. Y divídanse cada una de las rectas ΒΔ, ΔΓ en rectas iguales, y por cada uno de los puntos de corte trácense paralelas a ΑΔ, y trácense ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ. Éstas serán paralelas a ΒΓ. El centro de gravedad del paralelogramo ΜΝ está en la recta ΥΣ, y el centro de gravedad del paralelogramo ΚΞ está en la recta ΤΥ, y el del paralelogramo ΖΟ, en la recta ΤΔ [Prop. 9]. Luego el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todos ellos está en la recta ΣΔ [Prop. 4]. Sea Ρ, y trácese la recta ΡΘ y prolónguese, y trácese ΓΦ paralela a ΑΔ.

[18] Como más atrás (Prop. 12), se refiere al lado opuesto al ángulo en cuestión.

El[19] ΑΔΓ guarda con todos los triángulos construidos a partir de ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ semejantes al ΑΔΓ la misma razón que guarda ΓΑ con ΑΜ, porque ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ son iguales. Y puesto que también el triángulo ΑΔΒ guarda con todos los triángulos semejantes[20] construidos sobre ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ la misma razón que ΒΑ con ΑΛ, entonces el triángulo ΑΒΓ guarda con todos los triángulos mencionados[21] la misma razón que guarda 154
ΓΑ con ΑΜ. Pero ΓΑ guarda con ΑΜ una razón mayor que ΦΡ con ΡΘ. Pues la razón de ΓΑ a ΑΜ es la misma que la de la recta[22] ΦΡ con ΡΠ[23]. Luego también el triángulo ΑΒΓ guarda con los mencionados una razón mayor que la de ΦΡ con ΡΘ. De modo que también, por descomposición[24], los paralelogramos ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ guardan con los triángulos restantes una razón mayor que la de ΦΘ con ΘΡ. Esté ΧΘ con ΘΡ en la razón de los paralelogramos a los triángulos. Puesto que hay una magnitud, el triángulo ΑΒΓ, cuyo centro de gravedad es el punto Θ y de ella se ha restado la magnitud compuesta por los paralelogramos ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ y el punto Ρ es el centro de gravedad de la magnitud restada, entonces el centro de gravedad de la magnitud restante, compuesta por los triángulos que quedan en torno, está situado en la recta ΡΘ prolongada y tomada ⟨de ella una parte⟩ que guarde con ΘΡ la misma razón que guarda la magnitud restada con la restante [Prop. 8]. Por tanto, el punto Χ es el centro de gravedad de la

[19] [*Triángulo*].

[20] «Semejantes al propio triángulo ΑΔΒ», se entiende.

[21] Es decir, «con los triángulos construidos sobre ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ, ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ».

[22] [*Entera*].

[23] [*Porque los triángulos son semejantes*].

Eutocio comenta: «Pues si imaginas que las rectas ΡΦ, ΓΔ, una vez prolongadas, se cortan, por las propiedades de las paralelas ΦΡ será a ΡΠ como ΓΔ a ΔΩ; pero ΓΔ es a ΔΩ como ΓΑ a ΑΜ; por tanto, ΓΑ es a ΑΜ como ΦΡ a ΡΠ; y ΦΡ guarda con ΡΠ una razón mayor que la de ΦΡ con ΡΘ. Luego también ΓΑ guarda con ΑΜ una razón mayor que la de ΦΡ con ΡΘ».

[24] *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 52.

magnitud compuesta por las figuras que quedan en torno. Lo cual es imposible. Pues todas están en el plano hacia el mismo lado de la recta trazada por el punto X paralela a AΔ[25].

Luego es evidente lo propuesto.

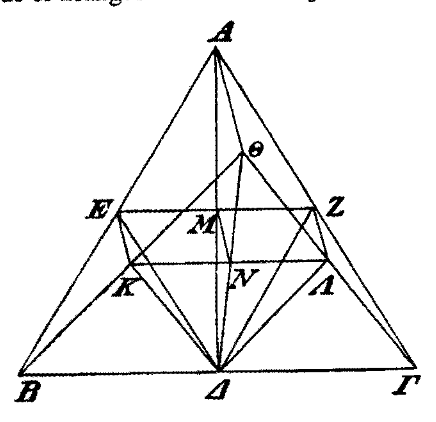
LO MISMO, DE OTRA MANERA

Sea el triángulo ABΓ, y trácese la recta AΔ hasta la mitad de BΓ.

Digo que el centro de gravedad del triángulo ABΓ está en la recta AΔ.

156 Pues no sea así, sino que, si es posible, sea Θ, y trácense las rectas AΘ, ΘB, ΘΓ y las rectas EΔ, ZE hasta el centro de BA, AΓ, y paralelas a AΘ trácense EK, ZΛ, y trácense KΛ, ΛΔ, ΔK, ΔΘ, MN.

Puesto que el triángulo ABΓ es semejante al triángulo ΔZΓ



porque el lado BA es paralelo al ZΔ, y el punto Θ es el centro de gravedad del triángulo ABΓ, entonces el punto Λ es el centro de gravedad del triángulo ZΔΓ [Prop. 11], pues los puntos Θ,

[25] [*Es decir, hacia uno de los lados*].

Λ están dispuestos de manera semejante en cada uno de los triángulos[26]. Por la misma razón, el punto K es el centro de gravedad del triángulo EBΔ. De modo que el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los triángulos EBΔ, ZΔΓ está en el centro de la recta KΛ [Prop. 11][27]. Y N es el punto medio de KΛ, puesto que BE es a EA como BK a ΘK y ΓZ es a ZA como ΓΛ a ΛΘ [*Elem.* VI 2]. Y si esto es así, BΓ es paralela a KΛ. Y ΔΘ ha sido trazada. Luego BΔ es a ΔΓ como KN a NΛ. De manera que el punto N es el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los dos triángulos mencionados. Y el punto M es el centro de gravedad del paralelogramo AEΔZ [Prop. 10]; de manera que el centro de gravedad de la magnitud compuesta por todas ⟨las magnitudes dichas⟩ está en la recta MN 158
[Prop. 4]. Y el punto Θ es el centro de gravedad del triángulo ABΓ. Luego al prolongar la recta MN pasa por el punto Θ. Lo cual es imposible. Luego no cabe que el centro de gravedad del triángulo ABΓ no esté en la recta AΔ.

Luego está en ella.

Proposición 14

En todo triángulo el centro de gravedad es el punto en el que coinciden las rectas trazadas desde los ángulos hasta el centro de los lados.

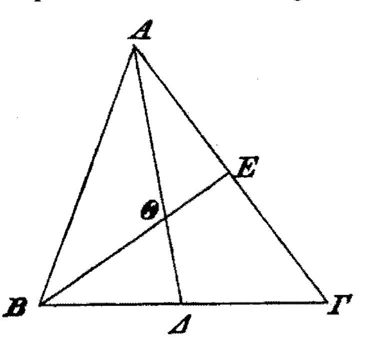
Sea el triángulo ABΓ, y trácese AΔ hasta el centro de BΓ, y BE hasta el centro de AΓ.

En efecto, el centro de gravedad del triángulo estará sobre cada una de las rectas AΔ, BE —pues eso se ha demostrado [Prop. 13].

[26] [*Puesto que forman ángulos iguales con los lados homólogos, pues eso es evidente*].

[27] [*Puesto que los triángulos EBΔ, ZΔΓ son iguales*].

De modo que el punto Θ es el centro de gravedad.

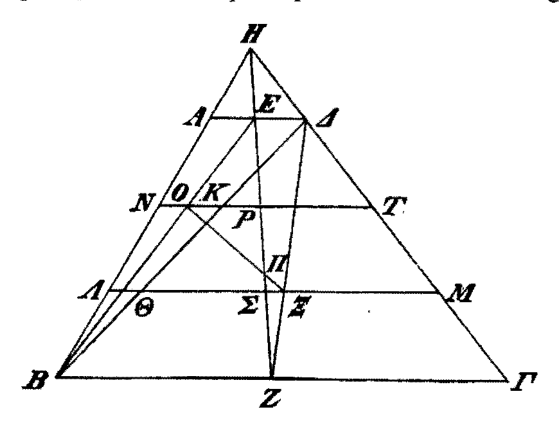


Proposición 15

En todo trapecio que tenga dos lados paralelos entre sí el centro de gravedad está en la recta que une los puntos medios de las paralelas, cortada de modo que el segmento de ella que tiene por extremo el punto medio de la menor de las paralelas guarde con el otro segmento la razón que guarda la recta igual a la suma del doble de la paralela mayor más la menor con el doble de la menor más la mayor de las paralelas.

160 Sea ΑΒΓΔ un trapecio con los lados ΑΔ, ΒΓ paralelos, y trácese ΕΖ que una los puntos medios de ΑΔ, ΒΓ.

Es evidente que el centro ⟨de gravedad⟩ del trapecio está en la recta ΕΖ. Pues si prolongas las rectas ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, es evidente que llegarán al mismo punto, y el centro de gravedad del triángulo ΗΒΓ estará en la recta ΗΖ y, de manera semejante, el centro de gravedad del triángulo ΑΗΔ en la recta ΕΗ [Prop. 13] y por tanto el centro de gravedad del resto del trapecio ΑΒΓΔ estará en la recta ΕΖ [Prop. 8]. Una vez trazada ΒΔ, córtesela en tres partes iguales por los puntos Κ, Θ, y por esos puntos trácense las rectas ΛΘΜ, ΝΚΤ paralelas a ΒΓ, y trácense ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ. Entonces, el centro de gravedad del triángulo ΔΒΓ estará en la recta ΘΜ, puesto que ΘΒ es la tercera parte de ΒΔ[28]. Y el centro de gravedad del triángulo ΔΒΓ está en la recta ΔΖ [Prop. 13]. De manera que el punto Ξ es el centro de grave-



dad del triángulo indicado. Por el mismo razonamiento, también el punto Ο es el centro de gravedad del triángulo ΑΒΔ. Luego el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los triángulos ΑΒΔ, ΒΔΓ —que es el trapecio— está en la recta ΟΞ. Y el centro de gravedad del trapecio indicado está también en la recta ΕΖ; de manera que el punto Π es el centro de grave- **162**
dad del trapecio ΑΒΓΔ. Y el triángulo ΒΔΓ guarda con el ΑΒΔ la razón de ΟΠ a ΠΞ [Props. 6 y 7]. Pero el triángulo ΒΔΓ es al triángulo ΑΒΔ como ΒΓ a ΑΔ [*Elem.* VI 1], y ΟΠ es a ΠΞ como ΡΠ a ΠΣ. Por tanto, ΒΓ es a ΑΔ como ΡΠ a ΠΣ. De modo que también dos ⟨veces⟩ ΒΓ más ΑΔ es a dos ⟨veces⟩ ΑΔ más ΒΓ como dos ⟨veces⟩ ΡΠ más ΠΣ es a dos ⟨veces⟩ ΠΣ más ΠΡ. Pero dos ⟨veces⟩ ΡΠ más ΠΣ es la suma ΣΡΠ, esto es, ΠΕ, y dos ⟨veces⟩ ΠΣ más ΠΡ es la suma ΡΣΠ, esto es, ΠΖ.

Luego ha quedado demostrado lo propuesto.

---

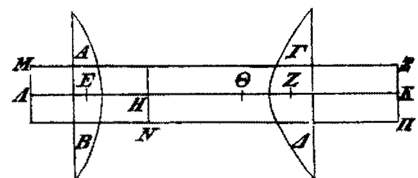
[28] [*Y ΜΘ ha sido trazada por el punto Θ paralela a la base*].

LIBRO II II 164

Proposición 1

Si dos áreas comprendidas por una recta y una parábola, que podemos aplicar a la recta dada[1]*, no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de la magnitud compuesta por ambas estará sobre la recta que une sus centros de gravedad cortando la recta mencionada de manera que sus segmentos sean inversamente proporcionales a las áreas.*

Sean AB, ΓΔ dos áreas como se ha indicado y sean sus centros de gravedad los puntos E, Z, y guarde ZΘ con ΘE la razón que guarda AB con ΓΔ.



Se ha de demostrar que el punto Θ es el centro de gravedad de la magnitud compuesta por las dos áreas AB, ΓΔ. 166

[1] «Aplicar un área a una recta dada» consiste en construir un rectángulo del área indicada usando la recta dada como uno de los lados del rectángulo. La construcción pedida deriva de *Cuadratura de la parábola* 17.

Sean cada una de las rectas ZH, ZK iguales a EΘ, y EΛ igual a ZΘ —es decir, a HE—. Por tanto ΛΘ también será igual a KΘ, y además ΛH será a HK como AB a ΓΔ. Pues cada una es el doble de cada una. Aplíquese a la recta ΛH el área de AB por ambos lados de ΛH de modo que el rectángulo MN sea igual al AB. Entonces el punto E será el centro de gravedad de MN; complétese el rectángulo NΞ, y MN guardará con NΞ la razón que guarda ΛH con HK. Y también el área AB guarda con ΓΔ la razón de ΛH a HK. Y entonces AB es a ΓΔ como MN a NΞ; y lo mismo tomando la proporción en alternancia[2]. Luego el área AB es igual a MN. Luego también ΓΔ es igual a NΞ, y su centro de gravedad es el punto Z. Y puesto que la recta ΛΘ es igual a ΘK y la recta entera ΛK corta por la mitad a los lados opuestos, el punto Θ es el centro de gravedad del rectángulo entero ΠM. Pero MΠ es igual a la suma de las dos áreas MN, NΞ.

De modo que el punto Θ es también el centro de gravedad del área compuesta por las dos AB, ΓΔ.

168 PROPOSICIÓN 2

Si en un segmento comprendido por una recta y una parábola se inscribe un triángulo que tenga la misma base que el segmento e igual altura, y de nuevo en los segmentos restantes se inscriben triángulos que tengan las mismas bases que los segmentos e igual altura, y sucesivamente se inscriben triángulos en los segmentos restantes del mismo modo, dígase que la figura resultante está inscrita propiamente[3].

Es evidente que, en la figura así inscrita, las rectas que unen

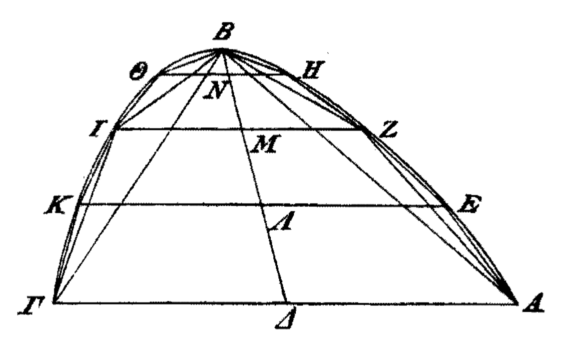
[2] *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 51.

[3] Gr. *gnorímōs engráphein*. La expresión que Arquímedes define aquí no encontró uso en la matemática griega fuera de este tratado y el *Comentario* de Eutocio al mismo.

los vértices de los ángulos más próximos al vértice del segmento y ⟨las que unen⟩ los contiguos serán paralelas a la base del segmento y serán cortadas por la mitad por el diámetro[4] del segmento y cortarán al diámetro en la razón de los números impares sucesivos, atribuyendo la razón 1 al vértice del segmento. Esto se demostrará en su orden correspondiente[5].

Y si en un segmento comprendido por una recta y una parábola se inscribe propiamente una figura rectilínea, el centro de gravedad de la figura inscrita estará en el diámetro del segmento.

Sea el segmento ABΓ como se ha dicho, e inscríbase en él propiamente una figura rectilínea AEZHBΘIKΓ.



Se ha de demostrar que el centro de gravedad de la figura rectilínea está en la recta BΔ.

Puesto que el centro de gravedad del trapecio AEKΓ está en la recta ΛΔ, y el centro del trapecio EZIK está en la recta MΛ, 170
y el centro del trapecio ZHΘI está en la recta MN, y el centro de

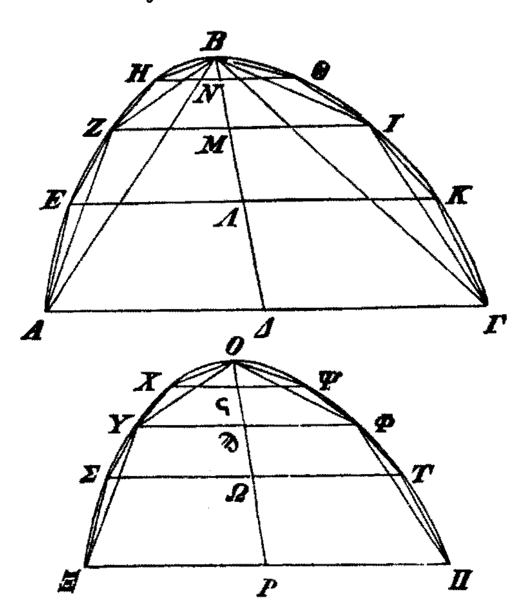
[4] En *Sobre conoides y esferoides* (246, 16-18) Arquímedes explica: «Llamo diámetro en todo segmento ⟨de sección cónica⟩ a la recta que corta por la mitad todas las rectas trazadas paralelas a su base»; *cf.* vol. I, Introducción, pág. 47.

[5] Estas demostraciones no figuran en las obras conservadas.

gravedad del triángulo HBΘ está en la recta BN, es evidente que también el centro del gravedad de la figura rectilínea entera está en la recta BΔ.

Proposición 3

Si en cada uno de dos segmentos semejantes comprendidos por una recta y una parábola se inscribe una figura rectilínea propiamente y si las figuras rectilíneas inscritas tienen el mismo número de lados, los centros de gravedad de las figuras rectilíneas cortan de modo semejante a los diámetros de los segmentos.



Sean dos segmentos ABΓ, ΞΟΠ e inscríbanse en ellos figuras rectilíneas propiamente y tengan el número de lados igual una y otra, y sean los diámetros de los segmentos las rectas BΔ, OP, y trácense las rectas EK, ZI, HΘ y las rectas ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ.

Entonces, puesto que la recta BΔ es cortada por las paralelas en la razón de la serie consecutiva de los números impares, e ⟨igualmente⟩ la recta PO, y sus segmentos[6] son iguales en número, es evidente que los segmentos de los diámetros guardarán la misma razón y que las paralelas guardarán la misma razón[7]. 172
Y los centros de gravedad de los trapecios AEKΓ y ΞΣΤΠ estarán sobre las rectas ΛΔ, ΩP dispuestos de manera semejante, puesto que las rectas AΓ, EK guardan la misma razón que las rectas ΞΠ, ΣΤ. Y, de nuevo, los centros de gravedad de los trapecios EZIK, ΣΥΦΤ dividirán de modo semejante a las rectas ΛM y Ωϡ, y los centros de gravedad de los trapecios ZHΘI, ΥΧΨΦ dividirán de manera semejante a las rectas MN, ϛϡ y los centros de gravedad de los triángulos HBΘ, ΧΟΨ estarán dispuestos de manera semejante en las rectas BN, Oϛ —en efecto, los trapecios y los triángulos guardan la misma razón.

Es evidente por tanto que el centro de gravedad de toda la figura rectilínea inscrita en el segmento ABΓ corta a BΔ de manera semejante a como el centro de gravedad de la figura inscri- 174
ta en el segmento ΞΟΠ ⟨corta⟩ a OP. Que es lo que había que demostrar.

Proposición 4

El centro de gravedad de todo segmento comprendido por una recta y una parábola está en el diámetro del segmento.

---

6 «Los segmentos de las rectas BΔ, PO», se entiende.

7 Puesto que, en aplicación de la prop. 2,

BN : NM : MΛ : ΛΔ = 1 : 3 : 5 : 7 = Oϛ : Oϛϡ : ϡΩ : ΩP,

entonces BN : BM : BΛ : BΔ = 1 : 4 : 9 : 16 = Oϛ : Oϡ : OΩ : OP.

Y en aplicación de *Cuadrat. paráb.* 3,

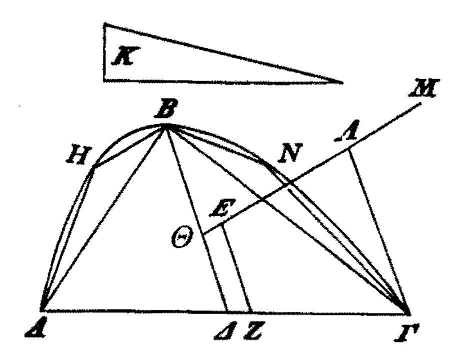
HN^2 : ZM^2 : EΛ^2 : AΔ^2 = BN : BM : BΛ : BΔ = Oϛ : Oϡ : OΩ : OP = Χϛ^2 : Υϡ^2 : ΣΩ^2 : ΞP^2.

Por tanto, HΘ : ZI : EK : AΓ = ΧΨ : ΥΦ : ΣΤ : ΞΠ. *(Nota de Heiberg.)*

Sea ΑΒΓ un segmento como se ha dicho, cuyo diámetro sea ΒΔ.

Se ha de demostrar que el centro de gravedad del segmento indicado está en la recta ΒΔ.

Pues si no, sea el punto E, y trácese por él EZ paralela a ΒΔ, e inscríbase en el segmento el triángulo ΑΒΓ que tenga la misma base e igual altura, y guarde el triángulo ΑΒΓ con el área K la razón que guarda ΓΖ con ΖΔ. Inscríbase además propiamente una figura rectilínea en el segmento de manera que los segmentos que quedan en torno sean menores que K. Y el centro de gravedad de la figura inscrita está en la recta ΒΔ. Sea Θ, y trácese la recta ΘΕ y prolónguese y trácese ΓΛ paralela a ΒΔ.



Entonces es evidente que la figura rectilínea inscrita en el segmento guarda con los segmentos que quedan una razón mayor que el triángulo ΑΒΓ con el área K. Pero el triángulo ΑΒΓ
176 es a K como la recta ΓΖ a la ΖΔ. Por tanto, también la figura rectilínea inscrita guarda con los segmentos que quedan en torno una razón mayor que ΓΖ con ΖΔ —es decir, que ΛΕ con ΕΘ—. Guarde entonces ME con ΕΘ la misma razón que la figura rectilínea con los segmentos. Puesto que el punto E es el centro de todo el segmento y Θ el de la figura rectilínea inscrita en él, es evidente que el centro de gravedad de la magnitud restante compuesta de los segmentos que quedan en torno está en

la prolongación de la recta ΘΕ una vez tomada de ella una recta que guarda con ΘΕ la razón de la figura rectilínea inscrita con los segmentos que quedan en torno. De manera que el punto M sería el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los segmentos que quedan en torno. Lo cual es imposible, pues todos los segmentos que quedan en torno estarán hacia el mismo lado de la recta trazada paralela a ΒΔ pasando por M.

Luego es evidente que el centro de gravedad estará en la recta ΒΔ.

Proposición 5

Si en un segmento comprendido por una recta y una parábola se inscribe propiamente una figura rectilínea, el centro de gravedad del segmento entero estará más cerca del vértice del segmento que el centro ⟨de gravedad⟩ de la figura rectilínea inscrita.

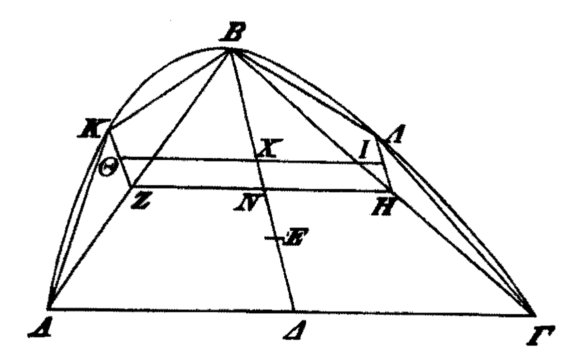
Sea ΑΒΓ un segmento como se ha dicho, y su diámetro ΔΒ, e inscríbase en él propiamente un primer triángulo ΑΒΓ, y córtese ΒΔ por el punto E de manera que BE sea el doble de ΕΔ.
Entonces el punto E es el centro de gravedad del triángulo ΑΒΓ. 178
Córtense por la mitad cada una de las rectas AB, ΒΓ por los puntos Z, H; y por los puntos Z, H trácense ZK, ΛΗ paralelas a ΒΔ.

Entonces el centro de gravedad del segmento AKB estará en la recta ZK [Prop. 4], mientras que el centro de gravedad del segmento ΒΓΛ estará en la recta ΗΛ. Sean[8] los puntos Θ, I, y trácese la recta ΘΙ. Y puesto que ΘΖΗΙ es un paralelogramo y NH es igual a ZN, entonces también ΧΘ es igual a XI. De modo que el centro de gravedad de la magnitud compuesta por ambos segmentos AKB, ΒΛΓ es el punto medio de ΘΙ[9], esto es,

[8] Entiéndase: «los centros de gravedad de los segmentos mencionados».

[9] [*Puesto que los segmentos son iguales*].

el punto X. Puesto que el punto E es el centro de gravedad del triángulo ABΓ y el punto X el de la magnitud compuesta por los
180 dos segmentos AKB, BΛΓ, es evidente que el centro de gravedad de todo el segmento ABΓ está sobre la recta XE, es decir, entre los puntos X, E. De modo que estaría más cerca del vértice del segmento el centro de gravedad del segmento entero que el del triángulo inscrito propiamente.

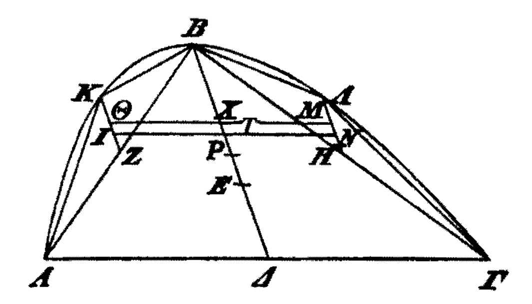


Inscríbase de nuevo en el segmento propiamente una figura rectilínea pentagonal AKBΛΓ y sea BΔ el diámetro del segmento entero y sean KZ, ΛH los diámetros de cada uno de los segmentos[10]. Sea pues el punto Θ el centro de gravedad del segmento y el punto I el del triángulo y, a su vez, sea el punto M el centro de gravedad del segmento BΛΓ y N el del triángulo. Y el punto X será el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los dos segmentos AKB, BΛΓ, y el punto T el de la magnitud compuesta por los dos triángulos AKB, BΛΓ.

Entonces, puesto que a su vez el punto E es el centro de gravedad del triángulo ABΓ y el punto X el de los dos segmentos AKB, BΛΓ, es evidente que el centro de gravedad del seg-

[10] [*Y puesto que en el segmento AKB se ha inscrito propiamente una figura rectilínea, está más cerca del vértice el centro de gravedad del segmento entero que el de la figura rectilínea*].

mento ABΓ entero está sobre la recta XE cortada de tal modo que el segmento de ésta[11] que tiene por extremo el punto X 182
guarde con el segmento menor la misma razón que la que guar-



da el triángulo ABΓ con la suma de los segmentos AKB, BΛΓ. Y el centro de gravedad del pentágono AKBΛΓ está sobre la recta ET cortada de tal manera que el segmento de ésta[12] que tiene por extremo el punto T guarde con el restante la misma razón que la que guarda el triángulo ABΓ con los triángulos AKB, BΛΓ. Puesto que el triángulo ABΓ guarda con ⟨la magnitud compuesta por⟩ los triángulos KAB, ΛBΓ una razón mayor que con ⟨la magnitud compuesta por⟩ los segmentos, es evidente que el centro de gravedad del segmento ABΓ está más cerca del vértice B que el de la figura rectilínea inscrita.

Y cabe el mismo razonamiento para todas las figuras rectilíneas inscritas propiamente en los segmentos.

Proposición 6

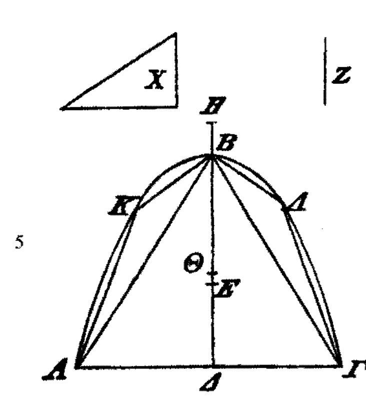
Dado un segmento comprendido por una recta y una parábola, es posible inscribir en el segmento propiamente una figura rectilínea de manera que la recta ⟨que queda⟩ entre los cen-

[11] «El segmento de la recta XE», se entiende.

[12] «El segmento de la recta TE», se entiende.

tros de gravedad del segmento y de la figura rectilínea inscrita sea menor que cualquier recta propuesta.

Sea dado un segmento ABΓ como se ha dicho, cuyo centro de gravedad sea Θ e inscríbase en él propiamente el triángulo ABΓ, y sea Z la recta propuesta, y guarde el triángulo ABΓ con el área X la misma razón que BΘ con Z. Inscríbase en el seg-
184 mento ABΓ propiamente una figura rectilínea AKBΛΓ de modo que los segmentos que quedan en torno sean menores que el área X, y sea E el centro de gravedad de la figura rectilínea inscrita.



Digo que la recta ΘE es menor que la recta Z.

Pues si no, o bien es igual o es mayor. Puesto que la figura rectilínea AKBΛΓguarda con los segmentos que quedan en torno una razón mayor que la del triángulo ABΓ con el área X —es decir, que la de ΘB con Z— también BΘ guarda con Z una razón no menor que la que guarda con ΘE, por no ser menor ΘE que Z; entonces con más razón la figura rectilínea AKBΛΓ guarda con los segmentos que quedan en torno una razón mayor que la de BΘ con ΘE; de modo que si hacemos que otra recta sea a ΘE como la figura rectilínea AKBΛΓ es a los segmentos que quedan en torno[13], será mayor que ΘB. Guarde esa razón HΘ con ΘE. Por tanto el punto H es el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los segmentos que quedan en torno; lo

[13] [*Puesto que Θ es el centro de gravedad del segmento ABΓ, una vez prolongada EΘ y tomada de ella una recta que guarde con EΘ la misma razón que la figura rectilínea AKBΛΓ con los segmentos que quedan en torno*].

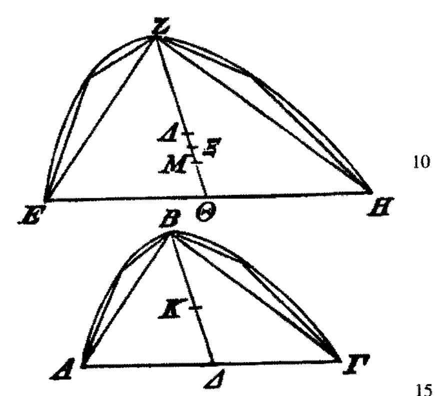
que es imposible, pues están hacia el mismo lado de la recta[14] trazada paralela a AΓ por el punto H.

Por tanto es evidente que la recta ΘE es menor que la Z. Y esto es lo que había que demostrar.

Proposición 7 186

Los centros de gravedad de dos segmentos semejantes comprendidos por una recta y una parábola cortan a los diámetros en la misma razón.

Sean ABΓ, EZH dos segmentos como se ha dicho, cuyos diámetros sean BΔ, ZΘ, y sea el punto K el centro de gravedad del segmento ABΓ, y Λ el de EZH.



Se ha de demostrar que los puntos K, Λ cortan a los diámetros en la misma razón.

Pues si no, sea ZM a MΘ como KB a KΔ, e inscríbase propiamente en el segmento EZH una figura rectilínea de modo que la recta que queda entre el centro[15] del segmento y el de la figura rectilínea inscrita sea menor que ΛM, y sea el centro de gravedad de la figura inscrita el punto Ξ, e inscríbase en el segmento ABΓ una ⟨figura rectilínea⟩ semejante a la[16] del segmento EZH[17].

[14] [*En el segmento*].

[15] «De gravedad», se entiende.

[16] [*Figura rectilínea inscrita*].

[17] [*Es decir, propiamente, de manera similar*].

El centro de gravedad de ésta está más cerca del vértice que el del segmento. Lo cual es imposible [Prop. 5].

Por tanto es evidente que BK guarda con KΔ la misma razón que ZΛ con ΛΘ.

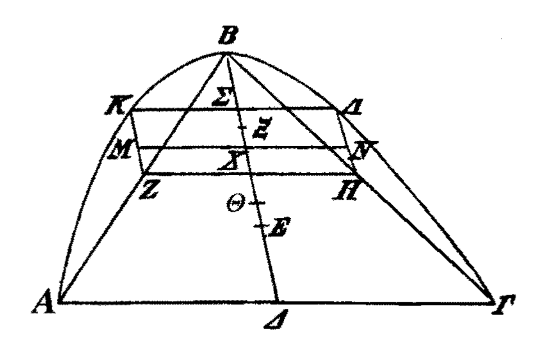
Proposición 8

El centro de gravedad de todo segmento comprendido por
188 *una recta y una parábola corta al diámetro del segmento de modo que la parte de éste que está hacia el vértice del segmento es una vez y media la parte del mismo que está hacia la base.*

Sea el segmento ABΓ como se ha dicho y sea BΔ su diámetro y el punto Θ su centro de gravedad.

Se ha de demostrar que BΘ es una vez y media ΘΔ.

Inscríbase propiamente en el segmento ABΓ el triángulo ABΓ, cuyo centro de gravedad sea E, y córtense por la mitad cada una de las rectas AB, BΓ, y trácense KZ, HΛ. Y ésas son los diámetros de los segmentos AKB, BΛΓ. Sea entonces el punto M el centro de gravedad del segmento AKB, y el punto N el de BΛΓ, y trácense ZH, MN, KΛ.



Por tanto, el punto X es el centro de gravedad de la magnitud compuesta por ambos segmentos. Puesto que BΘ es a ΘΔ

como KM a MZ y, por composición y tomando la proporción en alternancia[18], BΔ es a KZ como ΔΘ a MZ y, por otro lado, BΔ es el cuádruple de KZ —pues esto se demuestra al final, donde figura el signo ✓—, entonces ΔΘ también es el cuádruple de MZ. De modo que también la restante BΘ es el cuádruple de la restante KM, es decir, de ΣX. Y por tanto la suma de las restan-
tes BΣ, XΘ es el triple de ΣX. Sea BΣ el triple de ΣΞ. Y enton- 190
ces XΘ también es el triple de ΞX. Y puesto que BΔ es el cuádruple de BΣ —pues también eso se demuestra— y, por otro lado, BΣ es el triple de ΣΞ, entonces ΞB es la tercera parte de BΔ. Y también EΔ es la tercera parte de ΔB, puesto que el punto E es el centro de gravedad del triángulo ABΓ. Y entonces la recta restante ΞE es la tercera parte de BΔ. Y puesto que el punto Θ es el centro de gravedad del segmento entero, mientras que el centro de gravedad de la magnitud compuesta por los dos segmentos AKB, BΛΓ es el punto X y el del triángulo ABΓ el punto E, entonces el triángulo ABΓ será a los segmentos restantes como XΘ a ΘE. Y el triángulo ABΓ es el triple de los segmentos[19]; luego XΘ es el triple de ΘE. Y se había demostrado que XΘ era también el triple de XΞ; luego ΞE es el quíntuple de EΘ —es decir, ΔE el quíntuple de EΘ, pues es igual a ella—; de manera que ΔΘ es el séxtuple de ΘE. Y BΔ es el triple de ΔE; luego BΘ es una vez y media ΘΔ.

Que es lo que había que demostrar.

Proposición 9

Y si cuatro líneas están en proporción continua y con la razón que guarda la menor con el exceso en que la mayor excede

[18] La composición de una razón consiste en tomar el antecedente más el consecuente como una sola magnitud en relación con el consecuente; para las proporciones tomadas en alternancia, *cf.* vol. I, Introducción, pág. 52.

[19] [*Puesto que el segmento entero es cuatro tercios del triángulo ABΓ*].

a la menor se toma una recta que guarde esa razón con los tres quintos del exceso en que excede la mayor de las proporcionales a la tercera, y con la razón que guarda la recta igual al doble de la mayor de las proporcionales más el cuádruple de la segunda, más el séxtuplo de la tercera más el triple de la cuarta
192 *con una recta igual al quíntuple de la mayor más el décuplo de la segunda más el décuplo de la tercera más el quíntuple de la cuarta se toma una recta que guarde esa razón con el exceso en que la mayor de las proporcionales excede a la tercera, la suma de las dos rectas tomadas será dos quintos de la mayor*[20].

Sean cuatro líneas proporcionales AB, BΓ, BΔ, BE, y guarde ZH con los tres quintos de AΔ la razón que guarda BE con EA; y guarde HΘ con AΔ la razón que guarda una recta igual a la suma del doble de AB más el cuádruple de BΓ más el séxtu-

[20] La proposición 9 tiene carácter de lema; en otros tratados —*Conoides y esferoides*, *Espirales*—, Arquímedes anticipa estas demostraciones auxiliares del tratado, aunque aquí considere que su lugar adecuado es inmediatamente antes de la proposición en que ha de usarla. HEATH *(op. cit.*, pág. 216) ofrece la prueba en expresión algebraica; DIJKSTERHUIS *(op. cit.*, pág. 356), al presentar las proposiciones 9 y 10, hace ver que comparte su opinión, y se expresa en los siguientes términos: «tal como están (scil. "las proposiciones 9 y 10"), son casi la cosa más indigesta de todas las matemáticas griegas: en la proposición 9 se formula como teorema la reducción de una expresión dada, que se presenta en la proposición 10, y se prueba sintéticamente antes de que tengamos ninguna idea de los motivos para ocuparse precisamente de esta complicada cuestión. No llegamos a conocer estos motivos hasta que encontramos que el argumento de la proposición 10, asimismo perfectamente sintético, conduce a la expresión en cuestión». A continuación, Dijksterhuis resume las dos proposiciones en un único argumento analítico (págs. 356-360).

Lo que Arquímedes propone es lo siguiente: si tenemos cuatro líneas en proporción A, B, C, D, de las que A es la mayor y D, la menor, hay que hallar dos rectas x e y que cumplan que

$$D : (A - D) :: x : 3/5\,(A - C)$$

y que

$$2A + 4B + 6C + 3D : 5A + 10B + 10C + 5D :: y : (A - C)$$

Una vez determinadas x e y se cumplirá que $x + y = 2/5\,A$.

plo de BΔ más el triple de BE con una recta igual a la suma del quíntuple de AB más el décuplo de ΓB más el décuplo de BΔ más el quíntuple de BE.

Se ha de demostrar que ZΘ es los dos quintos de AB.

Puesto que AB, BΓ, BΔ, BE son proporcionales[21], también AΓ, ΓΔ, ΔE están en la misma razón[22], y la suma de AB, BΓ guarda con BΔ —es decir, el doble de la suma de AB, BΓ con el doble de BΔ— la misma
razón que AΔ con ΔE, y también[23] la suma de ΔB, BΓ 194
con EB y todos con todos[24]. Por tanto AΔ guarda con ΔE la misma razón que la recta igual a la suma del doble de AB más el triple de ΓB más ΔB con una recta igual a la suma del doble de BΔ más BE; y la razón que guarda una recta igual a la suma del doble de AB más el cuádruple de BΓ más el cuádruple de BΔ más el doble de BE con la recta igual a la suma del doble de ΔB más EB será la que guarde ΔA con una recta menor que ΔE.

Guárdela con ΔO. Y la suma de ambas[25] guardará con las primeras la misma razón: por tanto, OA guardará con AΔ la misma razón que una recta igual a la suma del doble de AB más el cuádruple de ΓB más el séxtuplo de BΔ más el triple de BE con la recta compuesta del doble de la suma de AB, EB más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ.

Y AΔ también guarda con HΘ la misma razón que el quíntuple de la suma de AB, BE junto con el décuplo de la suma de

[21] Ha de entenderse que lo son en proporción continua: AB : BΓ :: BΓ : BΔ :: BΔ : BE.

[22] Es decir, AΓ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔE.

[23] Sobreentiéndase: «guardan esa razón».

[24] Entiéndase: «⟨la suma de⟩ todos ⟨los antecedentes⟩ con ⟨la suma de⟩ todos ⟨los consecuentes⟩».

[25] «Ambas»: AΔ y ΔO.

ΓB, BΔ con la recta compuesta por el doble de AB más el cuádruple de ΓB más el triple de EB más el séxtuplo de BΔ.

Si se ordenan las razones de modo disímil —es decir, en proporción perturbada[26]— y se toma la proporción *ex aequali*, OA guarda con HΘ la misma razón que el quíntuple de la suma de AB, BE junto con el décuplo de la suma de ΓB, BΔ con la recta compuesta por el doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ.

196 Pero la recta compuesta por el quíntuplo de la suma de AB, BE junto con el décuplo de la suma de ΓB, BΔ guarda con la compuesta por el doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ la razón de cinco a dos. Por tanto AO guarda con HΘ la razón de cinco a dos.

A la vez, puesto que OΔ guarda con ΔA la misma razón que ⟨la suma de⟩ EB más el doble de BΔ con una recta igual a la compuesta por el doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ, y, por otro lado, AΔ es a ΔE como la recta compuesta por el doble de AB más el triple de ΓB más BΔ es a una recta igual a ⟨la suma de⟩ EB más el doble de BΔ, entonces, puesto que las razones están ordenadas de modo disímil —es decir, en proporción perturbada,— ⟨por la propiedad⟩ *ex aequali*, OΔ es a ΔE como el doble de AB junto con el triple de BΓ más BΔ es a la recta compuesta por el doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de ΓB, BΔ. De manera que también OE es a EΔ como la suma de ΓB más el triple de BΔ más el doble de EB es al doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ.

Además ΔE es a EB como AΓ a ΓB, puesto que también por

[26] Hay motivos para dudar de la pureza del texto: dado que se repite dos veces la misma indicación utilizando la primera vez la terminología arquimedea («de modo disímil») y la segunda la euclidiana («en proporción perturbada»), la expresión entre rayas podría tener carácter de glosa. *Cf.* ARQUÍMEDES, *Sobre los conoides y esferoides*, Prop. 29, 414, 2 y n. 115 en vol. I, pág. 340. Para la expresión *ex aequali*, *cf.* vol. I, Introducción, págs. 52-53.

composición[27], y el triple de ΓΔ es al triple de ΔB como el doble
de ΔE es al doble de EB. De modo que también la recta compues- 198
ta por AΓ más el triple de ΓΔ más el doble de ΔE la guarda[28] con la compuesta por ΓB más el triple de ΔB más el doble de EB.

Así, estando de nuevo las razones ordenadas de modo disímil —es decir, en proporción perturbada—, ⟨por la propiedad⟩ *ex aequali* EO guardará con EB la misma razón que AΓ más el triple de ΓΔ más el doble de ΔE con ⟨la recta⟩ doble de la suma de AB, BE junto con el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ. Por tanto, la recta entera OB guarda con BE la misma razón que la recta igual al triple de AB más el séxtuplo de ΓB más el triple de BΔ con el doble de la suma de AB, BE más el cuádruple de la suma de ΓB, BΔ.

Y puesto que las rectas EΔ, ΔΓ, ΓA están en la misma razón y también cada una de las sumas de EB más BΔ, de ΔB más BΓ y de ΓB más BA, también EΔ será a ΔA como la suma de EB, BΔ a la suma de ΔB, BΓ más la suma de ΓB, BA[29].

Por tanto, también por composición AE es a AΔ como la 200
suma de EB, BΔ más la suma de AB, BΓ y más la suma de ΓBΔ —lo cual es la suma de EBA más el doble de la suma de ΔBΓ— es a la suma de BΔ, BA más el doble de BΓ.

De modo que también el doble guardará con el doble la misma razón: es decir, que como EA es a AΔ así será el doble de la suma de EBA más el cuádruple de la suma de ΓBΔ al doble de la suma de ABΔ más el cuádruple de ΓB.

De modo que también EA es a los tres quintos de AΔ como la recta compuesta por el doble de la suma de ABE más el cuádruple de la suma de ΓBΔ a los tres quintos de la recta compuesta por el doble de la suma de ABΔ más el cuádruple de ΓB.

Pero EA es a los tres quintos de AΔ como EB a ZH. Y, por

[27] Entiéndase: «puesto que también por composición ΔB es a EB como AB a ΓB».

[28] Entiéndase: «la razón de ΔE a EB».

[29] Es decir: EΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΓA :: EB + BΔ : ΔB + BΓ :: ΔB + BΓ : ΓB + BA.

tanto, EB es a ZH como el doble de la suma de ABE más el cuádruple de la suma de ΔBΓ a los tres quintos de la recta compuesta por el doble de la suma de ABΔ más el cuádruple de ΓB.

Y se había demostrado que OB era a EB como el triple de la suma de ABΔ más el séxtuplo de ΓB al doble de la suma de ABE más el cuádruple de la suma de ΓBΔ.

Y por tanto, *ex aequali*, OB es a ZH como la recta compues-
202 ta por el triple de la suma de ABΔ más el séxtuplo de ΓB a los tres quintos de la recta compuesta por el doble de la suma de ABΔ más el cuádruple de ΓB.

Pero la recta compuesta por el triple de la suma de ABΔ más el séxtuplo de ΓB guarda con la recta compuesta por el doble de la suma de ABΔ más el cuádruple de ΓB la razón de tres a dos, mientras que con los tres quintos de la misma[30] guarda la razón de cinco a dos.

Y se había demostrado que también AO guarda con HΘ la razón de cinco a dos. Luego la recta BA entera guarda con la recta ZΘ entera la razón de cinco a dos.

Y si eso es así, ZΘ es dos quintos de AB. Que es es lo que había que demostrar.

Proposición 10

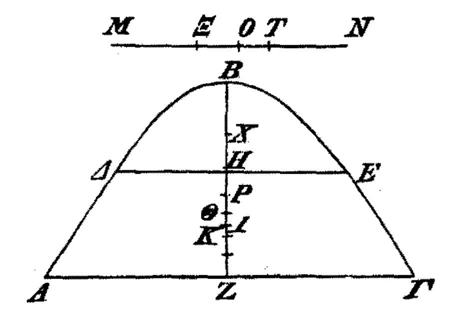
En todo tronco restado de una parábola, el centro de gra-
204 *vedad está en la recta que es el diámetro del tronco situado del modo siguiente: dividida la recta en cinco partes iguales, en la quinta parte central, de modo que su segmento más próximo a la base menor del tronco guarde con el segmento restante la misma razón que la que guarda el sólido que tiene por base el cuadrado construido sobre la mayor de las bases del tronco y por altura una recta igual a la suma del doble de la menor de las bases más la mayor con el sólido que tiene por base el cuadrado construido sobre la menor de las bases del tronco y por altura una recta igual a la suma del doble de la mayor de ellas más la menor.*

[30] «La misma» se refiere al «doble de la suma de AB más BΔ más el cuádruple de ΓB».

Sean en una parábola dos rectas AΓ, ΔE, y sea BZ el diámetro del segmento ABΓ —es evidente también que HZ es el diámetro del tronco AΔEΓ[31]—. Y, cortada la recta HZ en cinco partes iguales, sea ΘK la quinta parte central, y guarde ΘI con IK la misma razón que la que guarda el sólido que tiene por base el cuadrado de lado AZ y por altura una recta igual a la suma del doble de ΔH más AZ con el sólido que tiene por base el cuadrado de lado ΔH y por altura una recta igual a la suma del doble de AZ más ΔH.

Se ha de demostrar que el punto I es el centro de gravedad del tronco AΔEΓ.

Sea MN igual a ZB, y NO igual a HB, y tómese NΞ, media 206
proporcional de las rectas MNO, y la cuarta proporcional TN[32]; y como TM es a TN, así sea ZΘ a una recta a partir de I, caiga



donde caiga el otro punto —pues es indiferente que esté entre Z, H o entre H, B; ⟨pongamos que sea⟩ IP.

[31] [*Y que AΓ, ΔE son paralelas a la tangente a la parábola en el punto B*].
[32] Es decir, «de MN, NO, NΞ».

Y puesto que ZB es un diámetro en un segmento de parábola, o bien BZ es el diámetro principal de la parábola[33] o bien ha sido trazada paralela al diámetro, y las rectas AZ, ΔH son cuerdas conjugadas al diámetro[34], puesto que son paralelas a la tangente a la parábola en el punto B.

Si esto es así, AZ es a ΔH en potencia[35] como ZB es a BH en longitud, esto es, como MN a NO. Y MN es a NO en longitud como MN a NΞ en potencia. Y, por tanto, AZ es a ΔH en potencia como MN a NΞ en potencia. De modo que también en longitud están en la misma razón. Y, por tanto, el cubo de arista AZ es al cubo de arista ΔH como el cubo de arista MN al cubo de arista NΞ. Pero el cubo de arista AZ es al cubo de arista ΔH como
208 el segmento ABΓ es al segmento ΔBE, mientras que el cubo de arista MN es al cubo de arista NΞ como MN a NT. De modo que también, por descomposición, el tronco AΔEΓ es al segmento ΔBE como MT a NT, es decir, como 3/5 de HZ a IP. Y puesto que el sólido que tiene por base el cuadrado de lado AZ y por altura la recta compuesta por el doble de ΔH más AZ guarda con el cubo de arista AZ la razón del doble de ΔH más AZ con ZA —de modo que también la que guarda el doble de NΞ más NM con NM—, entonces también el cubo de arista AZ es al cubo de arista ΔH como MN a NT, y el cubo de arista ΔH es al sólido que tiene por base el cuadrado de lado ΔH y por altura la recta compuesta por el doble de AZ más ΔH como ΔH a la recta compuesta por el doble de AZ más ΔH, de modo que

[33] Gr. *archikà tâs tomâs*, expresión poco frecuente que, según MUGLER, *Dictionnaire de la terminologie mathématique des grecs*, carece de valor terminológico.

[34] La definición figura en APOLONIO, *Cónicas* I 4: «En toda línea curva que está en un plano, llamo diámetro a la recta que, trazada desde la curva, corta por la mitad a todas las rectas dentro de la curva paralelas a una recta, y llamo vértice de la línea al extremo de esa recta ⟨es decir, "del diámetro"⟩ en la línea, y digo que cada una de las paralelas ha sido trazada conjugada al diámetro».

[35] Comparar rectas en potencia es sinónimo de comparar los cuadrados construidos sobre ellas, es decir: $AZ^2 : \Delta H^2 :: ZB : BH$.

también están en la razón de TN a la recta compuesta por el doble de ON más TN, y entonces tenemos cuatro magnitudes —el sólido que tiene por base el cuadrado de lado AZ y por altura la recta compuesta por el doble de ΔH más AZ y el cubo de arista AZ y el cubo de arista ΔH y el sólido que tiene por base el cuadrado de lado ΔH y por altura la recta compuesta por el doble de AZ más ΔH— proporcionales a cuatro magnitudes tomadas de dos en dos —la recta compuesta por el doble de NΞ más NM, y otra magnitud, la recta MN, y otra a continuación, **210**
la recta NT, y por último la recta compuesta por el doble de NO más NT.

Ex aequali, por tanto, resultará que el sólido que tiene por base el cuadrado de lado AZ y por altura la recta compuesta por el doble de ΔH más AZ es al sólido que tiene por base el cuadrado de lado ΔH y por altura la recta compuesta por el doble de AZ más ΔH como la recta compuesta por el doble de NΞ más MN es a la recta compuesta por el doble de NO más NT. Pero el sólido indicado es al sólido indicado como ΘI a IK. Y por tanto ΘI es a IK como la recta compuesta a la recta compuesta. De modo que también serán proporcionales si tomamos la proporción en composición y multiplicamos por cinco los antecedentes; por tanto ZH es a IK como el quíntuple de la suma de MNT más el décuplo de la suma de NΞ, NO al doble de ON y NT. Y ZH es a ZK —que es dos quintos de ella[36]— como ⟨la recta compuesta por⟩ el quíntuple de la suma de MNT más el décuplo de la suma de ΞNO a ⟨la recta compuesta por⟩ el doble de suma de MNT más el cuádruple de la suma de ΞNO. Entonces, ZH será a ZI como el quíntuple de la suma de MNT más el décuplo de la suma de ΞNO a la recta compuesta por el doble de MN más el cuádruple de NΞ más el séxtuplo de ON más el triple de NT.

Puesto que MN, NΞ, ON, NT son cuatro rectas en proporción continua y NT es a TM como una recta tomada PI a los tres

[36] «ZK = 2/5 ZH», se entiende.

quintos de ZH —es decir, de MO— y, por otro lado, la recta compuesta por el doble de NM más el cuádruple de NΞ más el
212 séxtuplo de NO más el triple de NT es a la recta compuesta por el quíntuple de la suma de MNT más el décuplo de la suma de ΞNO como otra recta tomada IZ es a ZH —es decir, a MO— entonces, por lo dicho anteriormente, PZ será dos quintos de MN —es decir, de ZB.

De modo que el punto P es el centro de gravedad del segmento ABΓ.

Sea además el punto X el centro de gravedad del segmento ΔBE. Entonces el centro de gravedad del tronco AΔEΓ estará en la recta trazada como prolongación de XP que guarde con ella[37] la misma razón que guarda el tronco con el segmento restante. Y es el punto I[38], puesto que BP es los tres quintos de ZB y BX es los tres quintos de HB y, por tanto, XP es los tres quintos de la recta restante HZ.

Entonces, puesto que el tronco AΔEΓ es al segmento ΔBE como MT a TN, mientras que MT es a TN como los tres quintos de HZ —que es XP— es a PI, entonces también el tronco AΔEΓ será al segmento ΔBE como XP a PI.

Y el punto P es el centro de gravedad del segmento entero, y el punto X el centro de gravedad del segmento ΔBE.

Entonces está claro también que el punto I es el centro de gravedad del tronco AΔEΓ.

[37] Es decir, con XP.

[38] Entiéndase: «el que cumple esas condiciones».

ARENARIO

INTRODUCCIÓN

Frente a la mayor parte de las obras conservadas de Arquímedes, que, en forma de tratado, tienen por destinatarios a sus colegas matemáticos, el *Arenario* se nos presenta como una carta dirigida a un destacado hombre político, Gelón de Siracusa. Este personaje, hijo del tirano Hierón II y corregente con él durante unos veinticinco años, falleció en 216 a. C., fecha que nos sirve como término *ante quem* para la datación de la obra. El texto conserva casi plenamente el dialecto de Siracusa, y ese hecho nos lleva a pensar que no se contó entre los trabajos de Arquímedes que más interés suscitaron en el mundo bizantino. Su contenido, de carácter divulgativo —y es el único de los escritos suyos conservados al que podemos aplicar ese calificativo—, es resumido por Arquímedes al principio de la epístola: «Creen algunos, rey Gelón, que es infinito en cantidad el número de los granos de arena... Y hay también algunos que suponen que no es que sea infinito, sino que no ha recibido nombre ninguna cifra tan elevada que exceda esta cantidad... Pero yo intentaré hacerte ver —mediante demostraciones geométricas que podrás comprender— que algunos de los números a los que he dado nombre y que he dado a conocer en los libros que dediqué a Zeuxipo superan no sólo el número de granos de arena igual en magnitud a la Tierra colmada..., sino también el de un volumen igual al mundo».

El sistema de denominación de los números aludido por Arquímedes, del que parece estar tan satisfecho, no tuvo mucho

éxito, pues no fue adoptado por los matemáticos posteriores, pero su enorme potencialidad queda bien puesta de relieve en este trabajo.

La lengua griega carecía de palabras para expresar números elevados[1]. El geómetra puede, en general, pasarse sin los números, pero el físico no. No es de extrañar, por tanto, que Arquímedes, interesado en ambas ramas del saber, echase en falta una nomenclatura con la que poder traducir sus cálculos en palabras de modo claro y conciso.

El tema aparentemente banal de la obra —¿a quién se le ocurre contar los granos de arena?— y su brevedad no deben llevarnos a creer que carece de interés. Sin duda, no tiene la valía matemática de los grandes tratados[2], pero como fuente de información es ciertamente insustituible. Uno de los pasajes más curiosos de la obra es el que relata cómo, con una peana y dos carretes, Arquímedes se construyó una dioptra que le permitió establecer que el ángulo que ocupa el Sol en la eclíptica es «menor que una parte del recto dividido en 164 partes, pero mayor que una parte del recto dividido en 200 partes», aproximación más que razonablemente buena teniendo en cuenta la humildad de los medios empleados.

Un segundo pasaje digno de especial consideración es el relativo a Aristarco y su concepción heliocéntrica del mundo, pues es la única mención precisa y suficientemente amplia de esta hipótesis que encontramos en toda la literatura antigua, y la que le ha valido a Aristarco el sobrenombre de «el Copérnico de la Antigüedad»[3]. Arquímedes lo menciona para usar su teoría

[1] Sólo contaban con términos patrimoniales hasta *mýrioi* —«diez mil, miríada»— y en compuestos más modernos no iban más allá de la *myriás myriádōn* —«miríada de miríadas».

[2] Prácticamente todos los teoremas de que se sirve para alcanzar sus resultados figuran entre los más divulgados de los recogidos en los *Elementos* de Euclides.

[3] Contemporáneo de Arquímedes mayor que él *(circa* 310-230 a.C.), su cronología se determina gracias a que Ptolomeo menciona su observación del

como recurso auxiliar: en su intención de sorprender al destinatario —y a sus restantes lectores potenciales— expresando un número verdaderamente *muy* elevado, no se conforma con el recuento de la arena de la Tierra, una vez colmados «todos los mares y las oquedades hasta una altura igual a la de las más altas montañas», sino que pretende dar el número de granos necesario para llenar el mundo. Los astrónomos de su tiempo llamaban «mundo» a la esfera que, con centro en el centro de la Tierra, tenía por radio la recta que iba del centro del Sol al centro de la Tierra; pero Arquímedes buscará un mundo de dimensiones mucho mayores que las generalmente admitidas por sus contemporáneos. Y aquí es donde entra la hipótesis de Aristarco: según él, los astros fijos y el Sol permanecían inmóviles, y la Tierra se desplazaba según una circunferencia con el Sol como centro; además, la esfera de los astros fijos, situada en torno al mismo centro que el Sol, era de un tamaño tal que el círculo por el que se desplazaba la Tierra guardaba con la distancia a los astros fijos una razón como la que guarda el centro de la esfera con su superficie.

La afirmación de que la órbita de la Tierra en torno al Sol guarda con la esfera de las estrellas fijas la misma proporción que el centro respecto a la esfera no es aceptable geométricamente, objeta Arquímedes: «puesto que el centro de la esfera no tiene ningún tamaño, tampoco cabe aceptar que guarde ninguna razón con la superficie de la esfera»; pero inmediatamente a continuación explica que el razonamiento de Aristarco se ha de interpretar en el sentido de que, «puesto que suponemos que la Tierra es como el centro del mundo, la razón que guarda la Tierra con lo que nosotros llamamos mundo es la misma razón que

solsticio de verano de 280 a.C. *(Almagesto,* 3.2). Vitruvio lo alaba como uno de los pocos hombres que poseían un conocimiento igualmente profundo de las diversas ramas de la matemática; no obstante este juicio favorable, la única obra suya que se nos conserva es el tratado *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna*.

guarda la esfera en la que está el círculo según el cual se supone que la Tierra se desplaza con la esfera de los astros fijos». Por mucho que nos parezca hoy —como se lo parecía a los matemáticos antiguos— que la expresión es poco acertada, expresiones similares aparecen en las obras de Euclides, Gémino, Ptolomeo, Cleomedes y en el segundo presupuesto de la obra conservada de Aristarco, lo que nos hace pensar que se trataba de un «cliché» de los astrónomos antiguos, lo que explica que Arquímedes se avenga con tanta facilidad a aceptar un aserto matemáticamente improcedente.

La tercera información significativa que aporta la obra nos lleva a un terreno distinto del de la ciencia. Arquímedes nos transmite que un astrónomo, Fidias, había realizado observaciones y cálculos que le llevaron a afirmar que el diámetro del Sol era doce veces mayor que el de la Luna. La noticia podría no tener más interés si no fuera porque ese Fidias era el padre de Arquímedes[4], lo que nos permite comprender mejor el interés de Arquímedes por las cuestiones matemáticas y su presencia temporal en la Alejandría de vida científica animada por el Museo y sus ilustres visitantes.

[4] El texto de los mss. presenta en este punto una palabra incomprensible, ακουπατρος, que fue corregida por los editores en ἁμοῦ πατρός. La corrupción en los manuscritos por la confusión entre las formas cursivas de κ y μ no es rara (*cf.* Reynolds y Wilson, *Scribes and Scholars*, Oxford, 1968, cap. 6.viii [trad. esp. A. Bravo, Madrid, Gredos], y este hecho nos permite deducir que el error en la copia debió producirse después del siglo IX, cuando se generalizó el uso de la cursiva en los mss.

ARENARIO

II 216

I 1 Creen algunos, rey Gelón[1], que es infinito en cantidad el número de los granos de arena —me refiero no sólo a la que hay en Siracusa y el resto de Sicilia, sino también a la de toda la Tierra habitada y no habitada—. Y hay también algunos que suponen que no es que sea infinito, sino que no ha recibido nombre ninguna cifra tan elevada que exceda esta cantidad. **2** Está claro que quienes opinan así considerando la cantidad de granos de arena reunida en un volumen tan grande como el volumen de la Tierra, si llenaran con él todos los mares y las oquedades de la Tierra hasta una altura igual a la de las más altas montañas, podrán aún mucho menos decir un número que exceda la magnitud de aquél.

3 Pero yo intentaré hacerte ver —mediante demostraciones geométricas que podrás comprender— que algunos de los números a los que he dado nombre y que he dado a conocer en los libros que dediqué a Zeuxipo superan no sólo el número de granos de arena igual en magnitud a la Tierra colmada, como dijimos, sino también el de un volumen igual al mundo. **218**

4 Te consta que la mayor parte de los astrónomos llaman «mundo» a la esfera cuyo centro es el centro de la Tierra y cuyo radio es igual a la recta que hay entre el centro del Sol y el centro de la Tierra, pues eso ya lo has aprendido de las demostraciones escritas por los astrónomos.

[1] *Cf.* Introducción a este tratado, pág. 127.

Aristarco de Samos dio a conocer escritos con unas hipótesis en las que resulta, a partir de sus supuestos, que el mundo es múltiplo de lo recién indicado, **5** pues supone que los astros fijos y el Sol permanecen inmóviles, y que la Tierra se desplaza según una circunferencia de círculo en torno al Sol, el cual está situado en el centro de su curso, y que la esfera de los astros fijos, situada en torno al mismo centro que el Sol, es de un tamaño tal que el círculo según el cual supone que se desplaza la Tierra guarda con la distancia de los astros fijos una razón como la que guarda el centro de la esfera con su superficie.

6 Es más que evidente que esto es imposible: puesto que el centro de la esfera no tiene ningún tamaño tampoco cabe aceptar que guarde ninguna razón con la superficie de la esfera[2]. Pero hay que admitir que Aristarco razonó así: puesto que suponemos que la Tierra es como el centro del mundo, la razón que guarda la Tierra con lo que nosotros llamamos mundo es la misma razón que guarda la esfera en la que está el círculo según el cual se supone que la Tierra se desplaza con la esfera de los astros fijos. Adapta las demostraciones de los fenómenos[3] a este supuesto y, sobre todo, resulta evidente que supone que la magnitud de la esfera en la que hace que se mueva la Tierra es igual a lo que nosotros llamamos «mundo».

220 **7** Afirmamos que, incluso si hubiera una esfera de arena tan grande en magnitud como Aristarco supone que es la esfera de las estrellas fijas, también así podremos demostrar que algunos de los números con nombre a los que hacíamos referencia al principio[4] exceden en cantidad el número de granos de arena que contiene una magnitud igual a la de la esfera dicha, bajo los siguientes supuestos:

[2] Única referencia precisa antigua al sistema heliocéntrico de Aristarco; *cf.* la introducción a este tratado, pág. 128.

[3] El término «fenómenos» se ha de interpretar en su sentido técnico de «hechos astronómicos observables»; éstos eran los que los astrónomos griegos intentaban explicar matemáticamente.

[4] Es decir, los que Arquímedes había dado a conocer en sus escritos a Zeuxipo.

8 En primer lugar, que el perímetro de la Tierra es de 300 miríadas[5] de estadios y no mayor, aunque algunos[6] han intentado demostrar, como también tú sabes, que es de 30 miríadas de estadios. Pero yo, yendo más allá y poniendo el tamaño de la Tierra en el décuplo de lo que opinaban mis predecesores, supongo que es de 300 miríadas de estadios y no más[7].

Después de esto, que el diámetro de la Tierra es mayor que el diámetro de la Luna y que el diámetro del Sol es mayor que el diámetro de la Tierra, asumiendo en esto igualmente lo mismo que la mayoría de los astrónomos anteriores.

9 Después de esto, que el diámetro del Sol es treinta veces mayor que el diámetro de la Luna y no más, aunque entre los astrónomos anteriores Eudoxo hizo ver que era nueve veces ma-

[5] Aun cuando el DRAE sólo reconoce el significado «cantidad muy grande, pero indefinida» para el término «miríada», es bien conocido del hablante culto medio el significado «diez mil» que se atribuye al lexema «miria-» en compuestos en el sistema métrico decimal (valor que también recoge el DRAE). Más adelante, Arquímedes usará repetidamente la expresión μυριάδες μυριάδων: traducirla por «decenas de millar de decenas de millar» conduce a una especie de interminable juego de palabras que sólo contribuye a oscurecer los prístinos razonamientos del siracusano; de ahí que hayamos optado por permitirnos esta libertad terminológica.

[6] Para Heiberg, podría referirse a Dicearco, el geógrafo y erudito discípulo de Aristóteles.

[7] El estadio, como las demás medidas en la Antigüedad, era variable dependiendo de las ciudades; en época clásica contenía 600 pies, de lo que resulta un estadio de 192 m (aprox.) si tomamos el pie de Olimpia (320 mm), o de 177,5 m (aprox.) si tomamos el de Atenas, (295,7 mm). Con esas medidas, los cálculos que Arquímedes nos transmite como habitualmente aceptados en su tiempo dan un perímetro que oscila entre los 53.250 y los 57.600 km, y diez veces más con las cifras que él propone, entre 532.500 y los 576.000 km (¡!); la cifra hay que entenderla en el sentido que él mismo indica, de manifiesta exageración, con vistas a presentar la potencia del sistema de denominación de los números inventado por él.

El cálculo que las fuentes antiguas atribuyen a Eratóstenes, 252.000 estadios, arroja unos resultados mucho más próximos a los cálculos actuales, entre 44.730 y 48.384 km.

yor; Fidias, mi padre, que doce veces, y Aristarco intentó demostrar que el diámetro del Sol era más de dieciocho veces mayor que el de la Luna, pero menor que veinte veces más[8]. Y yo, yendo también más allá que éste, para que quede demostrado lo
222 que propongo sin lugar a debate, supongo que el diámetro del Sol es treinta veces mayor que el diámetro de la Luna, y no más.

10 Además de esto, que el diámetro del Sol es mayor que el lado del polígono[9] de mil lados inscrito en un círculo máximo de los del mundo. Esto lo supongo tras haber descubierto Aristarco que el Sol se nos aparece como un setecientosveinteavo de un arco del Zodíaco y yo, tras reflexionar sobre esta observación y recurriendo a instrumentos, intenté tomar del modo que sigue el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo. **11** Tomarlo de modo preciso no es fácil porque ni la vista ni las manos ni los instrumentos mediante los cuales ha de tomarse son fiables para mostrarlo con precisión.

Pero en el momento presente no es oportuno alargarse especialmente sobre estas cuestiones, puesto que cosas semejantes han sido señaladas repetidamente. Para la demostración de lo propuesto me basta con tomar un ángulo que no sea mayor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo y después tomar otro ángulo que no sea menor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo.

12 Tras disponer una regla larga sobre una peana vertical situada en un lugar desde donde se pueda ver el Sol cuando está a punto de levantarse y poner en pie sobre la regla un cilindrito torneado, inmediatamente después de la aparición del Sol[10],

[8] La relación real entre los diámetros de la luna y el Sol es, aproximadamente, de 1/400. Los cálculos de Aristarco se nos han conservado en su tratado *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna* (texto y trad. en TH. L. HEATH, *Aristarchus of Samos,* 1959 rp.).

[9] «Polígono regular», se entiende.

[10] Era costumbre en la Antigüedad llevar a cabo las observaciones en el momento de la salida del Sol, dado que no disponían de medios para protegerse la vista.

cuando éste está junto al horizonte y se puede mirar de frente, se vuelve la regla hacia el Sol y se coloca el ojo sobre el extremo de la regla. El cilindro, puesto entre el Sol y el ojo, tapa el Sol. Apartando entonces[11] poco a poco el cilindro de la vista en
el momento en que una pequeña parte del Sol empieza a vis- 224
lumbrarse por cada lado del cilindro, éste queda fijado. **13** Si entonces ocurre que la vista empieza a ver desde un punto, una vez trazadas rectas tangentes al cilindro desde el extremo de la regla en el lugar en que el ojo estaba fijado, el ángulo comprendido por las rectas trazadas es menor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo, porque se ve un poco del Sol por cada lado del cilindro. Puesto que los rayos visuales ven no desde un punto, sino a partir de cierta magnitud, se toma una magnitud redonda no menor que el ojo y poniendo la magnitud en el extremo de la regla en el lugar en que se había puesto el ojo, una vez trazadas rectas tangentes a la magnitud y al cilindro, el ángulo comprendido por las tangentes trazadas es menor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo.

14 La magnitud que no es menor que el ojo se halla del modo siguiente: se toman dos cilindros finos del mismo grosor uno que otro, uno blanco y otro no, y se colocan ante el ojo —el blanco separado del ojo, el que no es blanco tan cerca del ojo como sea posible, incluso tocando el rostro—. Si los cilindros tomados son más estrechos que el ojo, el cilindro más próximo es abarcado por el ojo y por detrás de él se ve el blanco: si son mucho más estrechos, entero, y si no son mucho más estrechos, se ven algunas partes del cilindro blanco por cada lado del que está más cerca del ojo; y si estos cilindros se toman del tamaño adecuado, uno de ellos con su grosor tapa al otro y no más. La
magnitud adecuada para el grosor de los cilindros que cumplen 226
este requisito no es menor que el ojo.

15 Y el ángulo que no es menor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo se toma así: si sobre la reglilla

[11] [*Del cilindro*].

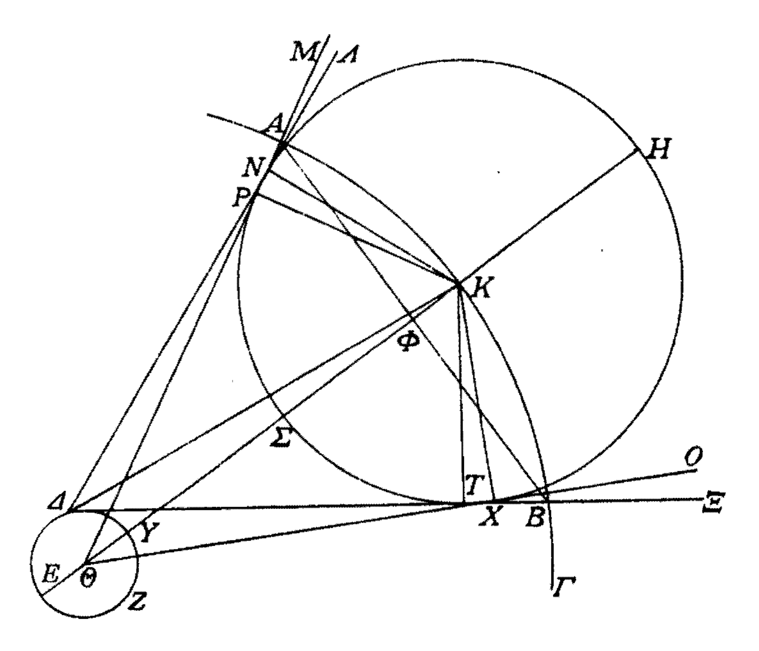
se separa el cilindro del ojo de manera que el cilindro cubra la vista del Sol entero, una vez trazadas rectas tangentes al cilindro desde el extremo de la regla en el lugar en que estaba situado el ojo, el ángulo comprendido por las rectas trazadas no es menor que el ángulo que ocupa el Sol y que tiene por vértice el ojo.

16 Midiendo un ángulo recto mediante los ángulos así tomados, el del vértice resultó menor que una parte de las 164 en que quedaba dividido el recto, mientras que el ángulo menor era mayor que una parte de las 200 en que quedaba dividido el recto. Es evidente por tanto que el ángulo con vértice en el ojo que ocupa el Sol es menor que una parte del recto dividido en 164 partes, pero mayor que una parte del recto dividido en 200 partes[12].

17 Si se dan por confirmados estos datos, se demuestra que el diámetro del Sol es mayor que el lado del polígono de mil lados inscrito en el círculo máximo de los ⟨de la esfera⟩ del mundo.

Considérese trazado un plano que pase por el centro del Sol y el centro de la Tierra y por el ojo cuando el Sol está un poco por encima del horizonte, y corte al mundo el plano trazado según el círculo ABΓ, y a la Tierra según el círculo ΔEZ, y al Sol según
228 el círculo ΣH, y sea Θ el centro de la Tierra y K el del Sol y sea Δ el ojo y desde Δ trácense las rectas ΔΛ, ΔΞ, tangentes al círculo ΣH, y séanle tangentes en los puntos N y T, y desde Θ trácense las rectas ΘM, ΘO y séanle tangentes en X y P, y corten las rectas ΘM, ΘO al círculo ABΓ en los puntos A y B.

18 Entonces ΘK es mayor que ΔK, dado que se ha supuesto que el Sol está por encima del horizonte[13]. De modo que el ángulo comprendido por ΔΛ, ΔΞ es mayor que el ángulo comprendido por las rectas ΘM, ΘO [*Ópt.* 24]. Por otro lado, el



ángulo comprendido por ΔΛ, ΔΞ es mayor que un doscientosavo de un recto, pero menor que una parte de un ángulo recto dividido en 164 partes, pues es igual al ángulo con vértice en el ojo que ocupa el Sol. De modo que el ángulo comprendido por ΘM, ΘO es menor que una parte del ángulo recto dividido en 164 partes, y la cuerda AB es menor que la cuerda que subtiende a un sector de la circunferencia del círculo ABΓ dividida en 656 partes. **19** Y el perímetro de la figura poligonal indicada[14]

[12] De los cálculos de Arquímedes resulta para el Sol una medida angular entre 27' y 32'1". La medida angular del Sol en la eclíptica es, en realidad, variable, dependiendo de la distancia entre el Sol y la Tierra en el momento de la medición, pero a la distancia media de la Tierra al Sol se calcula hoy un diámetro de 31' 59,26".

El ángulo del polígono de mil lados inscrito en la circunferencia tiene 21' 36".

[13] Es decir, el ángulo ΘΔK sería recto si el centro K del Sol estuviera exactamente sobre el horizonte (la tangente KΔ al círculo de centro en Θ sería perpendicular al radio ΘΔ); pero puesto que K está por encima del horizonte, el ángulo ΘΔK es obtuso; luego, en efecto, ΘK > ΔK.

[14] Es decir, el polígono de mil lados.

230 guarda con el radio del círculo ΑΒΓ una razón menor que la de 44 a 7, porque el perímetro de todo polígono inscrito en un círculo guarda con el radio una razón menor que la de 44 a 7 —ya sabes que hemos demostrado que la circunferencia de todo círculo es mayor que el triple del diámetro más algo menos de la séptima parte [*Med. círc.* 3], y el perímetro del polígono inscrito es menor que ella [*Esf. cil.* I, corol. a los postulados]—; por tanto, ΒΑ guarda con ΘΚ una razón menor que la de 11 a 1148. **20** De modo que ΒΑ es menor que la centésima parte de ΘΚ. Y el diámetro del círculo ΣΗ es igual a ΒΑ, porque ΦΑ, su mitad, es igual a ΚΡ —pues siendo iguales ΘΚ, ΘΑ, desde sus extremos se han trazado perpendiculares que subtienden el mismo ángulo.

Así pues, es evidente que el diámetro del círculo ΣΗ es menor que la centésima parte de ΘΚ. Y el diámetro ΕΘϒ es menor que el diámetro del círculo ΣΗ, puesto que el círculo ΔΕΖ es menor que el círculo ΣΗ [por hipót.]. Por tanto la suma de Θϒ, ΚΣ es menor que la centésima parte de ΘΚ. De modo que ΘΚ guarda con ϒΣ una razón menor que la de 100 a 99. **21** Y puesto que ΘΚ no es menor que ΘΡ [*Elem.* III 8] mientras que Σϒ es menor que ΔΤ, entonces ΘΡ guardaría con ΔΤ una razón menor que la de 100 a 99. Y puesto que, siendo triángulos rectángulos ΘΚΡ, ΔΚΤ, las rectas ΚΡ, ΚΤ son lados iguales, mientras que ΘΡ, ΔΤ son desiguales y ΘΡ es mayor, el ángulo com-
232 prendido por ΔΤ, ΔΚ guarda con el ángulo comprendido por ΘΡ, ΘΚ una razón mayor que la de ΘΚ a ΔΚ, pero menor que la de ΘΡ a ΔΤ; —pues si los catetos[15] correspondientes de dos triángulos rectángulos son iguales mientras que los otros son desiguales, el ángulo mayor de los adyacentes a los lados desiguales guarda con el menor una razón mayor que la mayor de las hipotenusas con la menor, pero menor que el cateto mayor

[15] Aquí, como un poco más adelante, la expresión usada por Arquímedes para referirse a los catetos es «*grammà tân perì tàn orthàn gonían*» («recta de las que están en torno al ángulo recto»).

con el cateto menor[16]—. **22** De modo que el ángulo comprendido por ΔΛ, ΔΞ guarda con el ángulo comprendido por ΘΟ, ΘΜ una razón menor que ΘΡ con ΔΤ, la cual precisamente[17] guarda una razón menor que la de 100 a 99. De modo que también el ángulo comprendido por ΔΛ, ΔΞ guarda con el ángulo comprendido por ΘΜ, ΘΟ una razón menor que la de 100 a 99.

Y puesto que el ángulo comprendido por ΔΛ, ΔΞ es mayor que la doscientosava parte de un recto, el ángulo comprendido por ΘΜ, ΘΟ sería mayor que 99 partes del recto dividido en veinte mil; de modo que es mayor que una parte del recto dividido en 203. Por tanto la recta ΒΑ es mayor que la cuerda que subtiende a un sector de la circunferencia del círculo ΑΒΓ dividida en 812 partes.

Y el diámetro del Sol es igual a ΑΒ[18]; por tanto es evidente que el diámetro del Sol es mayor que el lado del polígono de mil lados.

II 1 Supuestos estos resultados, se demuestra también lo siguiente, que el diámetro del mundo es menor que el diámetro de la Tierra multiplicado por diez mil y también que el diámetro del mundo es menor que cien miríadas de miríadas de estadios.

Dado que se ha supuesto que el diámetro del Sol no es mayor que treinta veces el diámetro de la Luna y que el diámetro 234
de la Tierra es mayor que el diámetro de la Luna, está claro que el diámetro del Sol es menor que treinta veces el diámetro de la Tierra.

A la vez, puesto que se ha demostrado que el diámetro del Sol es mayor que el lado del polígono de mil ángulos inscrito en un círculo máximo de los del mundo, está claro que el perímetro del polígono de mil lados indicado es menor que mil veces

[16] La prueba de este aserto puede deducirse de Euclides, *Elem.* VI 33.
[17] Es decir, «ΘΡ con ΔΤ».
[18] Es decir, al diámetro del círculo ΣΗ.

el diámetro del Sol. Y el diámetro del Sol es menor que treinta veces el diámetro de la Tierra; de modo que el perímetro del polígono de mil lados es menor que treinta mil veces el diámetro de la Tierra. **2** Entonces, puesto que el perímetro del polígono de mil lados es menor que treinta mil veces el diámetro de la Tierra, pero mayor que el triple del diámetro del mundo —pues se ha demostrado que el diámetro de todo círculo es menor que la tercera parte del perímetro de cualquier polígono, equilátero y de mayor número de ángulos que el hexágono, inscrito en el círculo[19]—, el diámetro del mundo sería menor que diez mil veces el diámetro de la Tierra.

Por consiguiente se ha demostrado que el diámetro del mundo es menor que diez mil veces el diámetro de la Tierra.

3 A partir de ello está claro que el diámetro del mundo es menor que cien miríadas de miríadas de estadios.

Dado que se ha supuesto que el perímetro de la Tierra no es mayor que trescientas miríadas de miríadas de estadios y que el perímetro de la Tierra es mayor que el triple del diámetro por ser la circunferencia de cualquier círculo mayor que el triple del diámetro, está claro que el diámetro de la Tierra es menor que cien miríadas de estadios. Puesto que el diámetro del mundo es menor **236** que 10.000 veces el diámetro de la Tierra, esta claro que el diámetro del mundo es menor que 100 miríadas de miríadas de estadios.

4 Respecto a las medidas y distancias, ésas son mis hipótesis, y en cuanto a la arena, lo que sigue: si hay una magnitud no mayor que una semilla de adormidera compuesta de granos de arena, el número de éstos no será mayor que diez mil y el diámetro de la semilla de adormidera no será menor que un cuarentavo de pulgada[20].

[19] *Cf. Elem.* IV 15, corol.

[20] La «pulgada» *(dáktylos)* era la medida más pequeña de longitud entre los griegos (en torno a 2 cm).

Esto lo supongo atendiendo a la siguiente observación: sobre una regla pulida se dispusieron semillas de adormidera en línea recta en fila de a una y tocándose unas a otras y veinticinco semillas de adormidera ocuparon una longitud mayor que una pulgada. Poniendo que el diámetro de la semilla de adormidera es menor, tomo como hipótesis que es un cuarentavo de pulgada y no menor, y con ello pretendo demostrar lo propuesto sin lugar a discusión.

III 1 Hasta aquí lo que admito como hipótesis. Pero supongo que también es útil que hable sobre la denominación de los números —entre otras cosas, para que no se pierdan los que no han tenido acceso al libro que dediqué a Zeuxipo por no haberse dicho de antemano en este libro nada sobre esa cuestión—. **2** Ocurre, en efecto, que los nombres de los números que nos han sido transmitidos llegan hasta las miríadas y por encima de las miríadas sabemos decir un número hasta las miríadas de miríadas. Llámese pues primeros a los números indicados hasta la miríada de miríadas.

La miríada de miríadas de los números primeros llámese unidad de los números segundos, y cuéntense las unidades **238** de ⟨números⟩ segundos y, a partir de las unidades, las decenas, centenas y millares y miríadas hasta las miríadas de miríadas[21].

[21] En resumen, los números primeros, N_1, cumplen la condición de ser tales que $10^8 > N_1 \geq 1$; en los números segundos, N_2, que $10^{16} > N_2 \geq 10^8$; en los números terceros, N_3, que $N_3 \geq 10^{16}$ y $N_3 < 10^{24}$... hasta llegar a los números del ordinal correspondiente a la decena de millar de miríadas, $N_{100.000.000}$, $N_{100.000.000} \geq 10^{799.999.992}$ y $N_{100.000.000} < 10^{800.000.000}$. Los mencionados N_1, N_2, N_3... $N_{100.000.000}$ formarían el conjunto de los números del primer período, P1, y $10^{800.000.000}$ sería la unidad de los números primeros del segundo período, P_2 (N_1); los números segundos del segundo período, P_2 (N_2), estarían en el intervalo $(10^{800.000.000})^8 \leq P_2\ (N_2) < (10^{800.000.000})^{16}$. El primer número del tercer período, P_3, sería $(10^{800.000.000})^{800.000.000}$; de modo que el número más elevado al que Arquímedes da nombre «las miríadas de miríadas de los números del ordinal decena de millar de miríadas del período de la posición decena de millar de miríadas», $P_{100.000.000}$

De nuevo, a la miríada de miríadas de los números segundos llámesela unidad de los números terceros, y cuéntense las unidades de los números terceros y, a partir de las unidades, las decenas, centenas, millares y miríadas hasta las miríadas de miríadas.

3 Del mismo modo, llámese también unidad de los números cuartos a la miríada de miríadas de los números terceros, y a las miríadas de miríadas de números cuartos llámeselas unidad de los números quintos, y avanzando así sucesivamente tengan los números nombres que lleguen hasta las miríadas de miríadas de los números del ordinal correspondiente a la miríada de miríadas[22].

Conocidos también hasta ese punto los números, cabe avanzar aún más: **4** llámese a los números indicados hasta ahora «del primer período», y llámese al último número del primer período unidad de los números primeros del segundo período; y de nuevo, llámese unidad de los números segundos del segundo período a la miríada de miríadas de los números primeros del segundo período. De modo semejante, también al último número de éstos llámesele unidad de los números terceros del segundo período y así sucesivamente, según avanzan los números tengan los nombres del segundo período hasta las miríadas de miríadas de números del ordinal correspondiente a la miríada de miríadas. De nuevo, al último número del segundo período llámesele unidad

($N_{100.000.000}$), sería, en expresión de T. L. Heath, «la unidad seguida de 80.000 millones de millones de ceros».

[22] El griego emplea en este punto *myriákismyriostôn,* adjetivo correspondiente al número cardinal *mýrioi myriádes* (decena de millar de miríadas), derivado del adverbio multiplicativo *myriákis* («diez mil veces») y el ordinal *myriostós* («el que ocupa la posición diez mil»); la facilidad del griego para la construcción de numerales ordinales a partir de los numerales cardinales contrasta con la escasa flexibilidad del español a ese respecto: «A partir de "mil" dejan ya de formarse ordinales compuestos orgánicos. Los ordinales no existentes se suplen con el número cardinal correspondiente solo o con las expresiones "el que hace [o 'está'] el número..."» *(cf.* en M. MOLINER, *Diccionario de uso del español*², Madrid, Gredos, 1998, el vol. II, APÉNDICE II «Desarrollos gramaticales», pág. 1.529). Parte de la dificultad para la traducción de este pasaje procede, justamente, de esta particularidad lingüística del español.

del tercer período, y así sucesivamente avanzando hasta las miríadas de miríadas de los números del ordinal de la miríada de miríadas del período de la posición de la miríada de miríadas.

5 Una vez que éstos han recibido nombre de este modo, si **240**
hay números dispuestos en proporción sucesivamente a partir de la unidad, y el inmediato a la unidad es la decena, los ocho primeros de ellos junto con la unidad pertenecerán a los llamados primeros números; los otros ocho siguientes a éstos, a los llamados segundos, y los demás, según el mismo sistema que éstos, pertenecerán a los denominados con el nombre correspondiente a la distancia entre la octada de sus números y la primera octada de números.

El octavo número de la primera octada de números es mil miríadas, y el primero de la segunda octada, puesto que es el décuplo del anterior, será diez mil miríadas: éste es la unidad de los números segundos. Y el octavo de la segunda octada es mil miríadas de números segundos. De nuevo, el primero de la tercera octada, puesto que es el décuplo del anterior a él, será diez mil miríadas de los números segundos. Y éste es la unidad de los números terceros. Y es evidente que las octadas de cualquier magnitud serán como se ha dicho.

6 Y es útil conocer también lo siguiente:

Si habiendo números en proporción a partir de la unidad se multiplican entre sí algunos de la misma serie proporcional, el resultado pertenecerá a la misma serie proporcional y distará del mayor de los factores cuanto dista de la unidad en la serie proporcional el menor de los factores, pero de la unidad distará uno menos que el número suma de los que separan a los factores de la unidad[23].

[23] Nuestro equivalente, más generalizado, se expresa diciendo que la multiplicación de potencias de la misma base tiene como resultado otra potencia de la misma base cuyo exponente es suma de los factores. El pasaje ha sido considerado una sorprendente anticipación por parte de Arquímedes de una de las

242 **7** Sean A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I, K, Λ ciertos números en proporción a partir de la unidad y sea A la unidad y multiplíquese Δ por Θ y sea X el resultado. Tómese de la serie en proporción Λ que diste de Θ tantos elementos cuantos dista Δ de la unidad.

Se ha de demostrar que X es igual a Λ.

Puesto que, habiendo números en proporción, Δ dista de A lo mismo que Λ de Θ, el número Δ guarda con A la misma razón que Λ con Θ; por otra parte, Δ es el Δ-múltiplo de A; luego Λ es el Δ-múltiplo de Θ; de modo que Λ es igual a X.

8 Está claro por tanto que el resultado pertenece a la proporción y que dista del mayor de los factores los mismos elementos que dista el menor de la unidad.

Y es evidente también que dista de la unidad uno menos del número suma de ambos (de los que distan de la unidad Δ y Θ). Pues A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ son tantos elementos cuantos dista Θ de la unidad, mientras que I, K, Λ son uno menos de los que dista Δ de la unidad. Pues junto con Θ son otros tantos.

IV 1 Supuesto lo primero y demostrado lo segundo, se demostrará lo propuesto[24].

Dado que se ha supuesto que el diámetro de la semilla de adormidera no es menor que un cuarentavo de pulgada, está claro que una esfera que tenga por diámetro una pulgada no es mayor que como para contener sesenta y cuatro mil semillas de adormidera; pues es múltiplo el número ⟨de veces⟩ dicho de la
244 esfera que tiene por diámetro un cuarentavo de pulgada —pues ya se ha demostrado que las esferas guardan entre sí una razón

propiedades básicas de los logaritmos (en este caso de base 10): «el logaritmo de un producto de dos números es igual a la suma de sus logaritmos», lo cual permite reducir multiplicaciones a sumas.

[24] Se refiere a lo que ofreció al principio del tratado, a saber, «que algunos de los números a los que he dado nombre... superan no sólo el número de granos de arena igual en magnitud a la Tierra colmada... sino también el ⟨número de granos de arena⟩ de un volumen igual al mundo» (216, 17-218, 1).

que es la de los cubos de sus diámetros—. **2** Dado que se ha supuesto que el número de granos de arena que caben en el tamaño de una semilla de adormidera no es superior a diez mil, está claro que si se llenara de granos de arena una esfera que tuviera una pulgada de diámetro, el número de granos de arena no sería mayor que diez mil por sesenta y cuatro mil. Y este número es 6 unidades de los números segundos y cuatro mil miríadas de los primeros. Por tanto es menor que 10 unidades de los números segundos.

La esfera de 100 pulgadas de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera de una pulgada de diámetro —por guardar entre sí las esferas una razón que es el cubo de la de sus diámetros—. Así que, si hubiera una esfera de arena del tamaño de una esfera de 100 pulgadas de diámetro, está claro que el número de granos de arena será menor que el número resultante de multiplicar las diez unidades de números segundos por cien miríadas.

3 Puesto que las diez unidades de números segundos es el décimo número proporcional a partir del primero en la proporción en la que cada término es el décuplo del anterior, mientras que las cien miríadas son el séptimo término a partir de la unidad en esa misma serie proporcional, está claro que el número resultante será el décimo sexto de esa serie proporcional a partir de la unidad —pues se ha demostrado que dista de la unidad uno menos que el número suma de los que distan de la unidad los factores.

De estos dieciséis, los ocho primeros junto con la unidad 246
pertenecen a los llamados primeros; los ocho siguientes, a los segundos, y el último de ellos es mil miríadas de números segundos.

Es evidente por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupan una magnitud igual a una esfera que tenga 100 pulgadas de diámetro es menor que mil miríadas de números segundos.

4 De nuevo, la esfera que tiene diez mil pulgadas de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera que tiene 100 pulgadas de diámetro. Así que, si hubiera una esfera de arena del tamaño de una esfera que tuviera de diámetro diez mil pulgadas, está claro que el número de granos de arena sería menor que el resultado de multiplicar las mil miríadas de números segundos por 100 miríadas.

Y puesto que las mil miríadas de números segundos son el número décimo sexto a partir de la unidad en la serie proporcional, mientras que las 100 miríadas son el séptimo a partir de la unidad en esa misma serie proporcional, está claro que el resultado será el vigésimo segundo elemento a partir de la unidad de los de esa misma serie proporcional.

5 De estos veintidós, los ocho primeros junto con la unidad pertenecen a los llamados primeros; los ocho que siguen a estos, a los llamados segundos y los seis restantes a los llamados terceros; y el último de ellos es diez miríadas de los números terceros.

Está claro que la cantidad de granos de arena de una magnitud igual a una esfera de diez mil pulgadas de diámetro es inferior a 10 miríadas de números terceros. Y puesto que la esfera de un estadio de diámetro es menor que la esfera de diez mil pulgadas de diámetro[25], también es evidente que la cantidad de granos
248 de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de un estadio de diámetro es inferior a 10 miríadas de números terceros.

6 De nuevo, la esfera que tiene 100 estadios de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera que tiene de diámetro un estadio. Si hubiera una esfera de arena del tamaño de una esfera de 100 estadios de diámetro, está claro que el número de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las diez miríadas de números terceros por 100 miríadas.

[25] Recuérdese que el estadio equivalía, aproximadamente, a 192 m y que diez mil pulgadas (unos 2 cm cada una) serían unos 200 m.

Y puesto que las diez miríadas de números terceros son el término vigésimo segundo de la serie proporcional a partir de la unidad, mientras que las 100 miríadas son el séptimo término a partir de la unidad en la misma serie proporcional, está claro que el resultado será el vigésimo octavo a partir de la unidad en la misma serie proporcional.

7 De estos veintiocho, los ocho primeros junto con la unidad pertenecen a los llamados primeros, mientras que los otros ocho siguientes a éstos, a los segundos, y los ocho que siguen a éstos a los terceros, y los cuatro restantes a los llamados cuartos; y el último de ellos es mil unidades de números cuartos.

Está claro por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de 100 estadios de diámetro es inferior a mil unidades de los números cuartos.

8 De nuevo, la esfera que tiene diez mil estadios de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera que tiene 100 estadios de diámetro. Si hubiera una esfera de arena del tamaño de una esfera de diez mil estadios de diámetro, está claro que la cantidad de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las mil unidades de los números cuartos por 100 miríadas. **250**

Como las mil unidades de números cuartos son el término vigésimo octavo a partir de la unidad en la serie proporcional, mientras que las cien miríadas son el séptimo a partir de la unidad en la misma serie proporcional, está claro que el resultado será el trigésimo cuarto elemento a partir de la unidad de esa misma serie proporcional.

9 De estos treinta y cuatro elementos, los ocho primeros con la unidad pertenecen a los números primeros; los siguientes ocho a los segundos y los otros ocho después de éstos a los terceros y los ocho después de éstos a los cuartos, y los dos restantes pertenecerán a los llamados quintos; y el último de ellos es diez unidades de números quintos.

Por tanto es evidente que la cantidad de granos de arena que

ocupa una magnitud igual a la de la esfera de diez mil estadios de diámetro será inferior a diez unidades de números quintos.

10 De nuevo, la esfera de 100 miríadas de estadios de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera de diez mil estadios de diámetro. Si hubiera una esfera de granos de arena del tamaño de una esfera de 100 miríadas de estadios de diámetro, es evidente que el número de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las diez unidades de números quintos por cien miríadas.

Y puesto que las diez unidades de números quintos son el trigésimo cuarto elemento a partir de la unidad en esta serie proporcional mientras que las 100 miríadas son el séptimo elemento a partir de la unidad en la misma serie proporcional, está claro que el resultado será el cuadragésimo elemento a partir de la unidad en esta misma serie proporcional.

11 De estos cuarenta elementos, los ocho primeros junto con la unidad pertenecen a los llamados números primeros; los
252 otros ocho después de éstos, a los segundos y los otros ocho después de éstos a los terceros y los ocho de después de los terceros a los cuartos, y los ocho después de éstos a los llamados quintos; y el último de ellos son mil miríadas de números quintos.

Es evidente por tanto que el número de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de 100 decenas de miles de estadios de diámetro es inferior a mil miríadas de números quintos.

12 Y la esfera de una miríada de miríadas de estadios de diámetro es múltiplo cien miríadas de veces de la esfera de 100 miríadas de estadios de diámetro. Si hubiera una esfera de arena del tamaño de una esfera de una miríada de miríadas de estadios de diámetro, está claro que la cantidad de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las mil miríadas de números quintos por cien miríadas.

Y puesto que las mil miríadas de números quintos es el cuadragésimo elemento proporcional a partir de la unidad, mientras que las cien miríadas es el séptimo a partir de la unidad en esa misma serie proporcional, está claro que el resultado será el cuadragésimo sexto elemento a partir de la unidad.

13 De estos cuarenta y seis, los ocho primeros junto con la unidad pertenecen a los llamados números primeros; los ocho después de éstos, a los segundos y los otros ocho después de éstos, a los terceros y los otros ocho después de los terceros, a los cuartos y los ocho después de los cuartos, a los quintos y los seis restantes pertenecen a los llamados sextos. Y el último de ellos es diez miríadas de números sextos

Es evidente por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de una miríada de miría-
das de estadios de diámetro es inferior a 10 miríadas de núme- **254**
ros sextos.

14 Y la esfera de 100 miríadas de miríadas de estadios de diámetro es múltiplo 100 miríadas de veces de la esfera de diez mil miríadas de estadios de diámetro. Así que, si hubiera una esfera de granos de arena del tamaño de una esfera de 100 miríadas de miríadas de estadios, está claro que la cantidad de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las 10 miríadas de números sextos por 100 miríadas.

Y puesto que las diez miríadas de números sextos son el cuadragésimo sexto elemento proporcional a partir de la unidad, mientras que las 100 miríadas son el séptimo elemento a partir de la unidad en esa misma serie proporcional, está claro que el resultado será el quincuagésimo segundo elemento a partir de la unidad en esa misma serie proporcional.

15 De estos cincuenta y dos, los cuarenta y ocho junto con la unidad son los llamados primeros, segundos, terceros, cuartos, quintos y sextos, y los cuatro restantes pertenecen a los llamados séptimos, y el último de ellos son mil unidades de los números séptimos.

Está claro por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de cien miríadas de miríadas de estadios de diámetro es inferior a 1.000 unidades de números séptimos.

16 Puesto que se ha demostrado que el diámetro del mundo es menor que diez mil veces 100 miríadas de estadios, está claro también que la cantidad de granos de arena que ocupa un volumen igual al mundo es inferior a 1.000 unidades de números séptimos.

Por tanto, ha quedado demostrado que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a lo que la mayor parte de los astrónomos llaman mundo es inferior a 1.000 unidades de números séptimos.

256 Y se demostrará también que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a una esfera del tamaño de la que Aristarco supone para la esfera de las estrellas fijas es inferior a mil miríadas de números octavos.

17 Dado, por una parte, que supone que la Tierra guarda con lo que llamamos mundo la misma razón que la que guarda el indicado mundo con la esfera de las estrellas fijas que Aristarco propone como hipótesis, y que los diámetros de las esferas guardan entre sí la misma razón; y que, por otra parte, se ha demostrado que el diámetro del mundo es menos de diez mil veces el diámetro de la Tierra, entonces es evidente también que el diámetro de la esfera de las estrellas fijas es menor que el diámetro del mundo multiplicado por diez mil. **18** Y puesto que las esferas guardan entre sí una razón que es el cubo de la de sus diámetros, está claro que la esfera de los astros fijos que Aristarco propone como hipótesis es menor que una miríada de miríadas de veces el mundo multiplicado por diez mil. Y se ha demostrado que la cantidad de granos de arena que contiene una magnitud igual al mundo es inferior a 1.000 unidades de números séptimos.

Está claro que si hubiera una esfera de granos de arena del tamaño de la que Aristarco supone para la esfera de los astros fijos, el número de granos de arena será inferior al número resultante de multiplicar las mil unidades[26] por la miríada de miríadas multiplicada por diez mil.

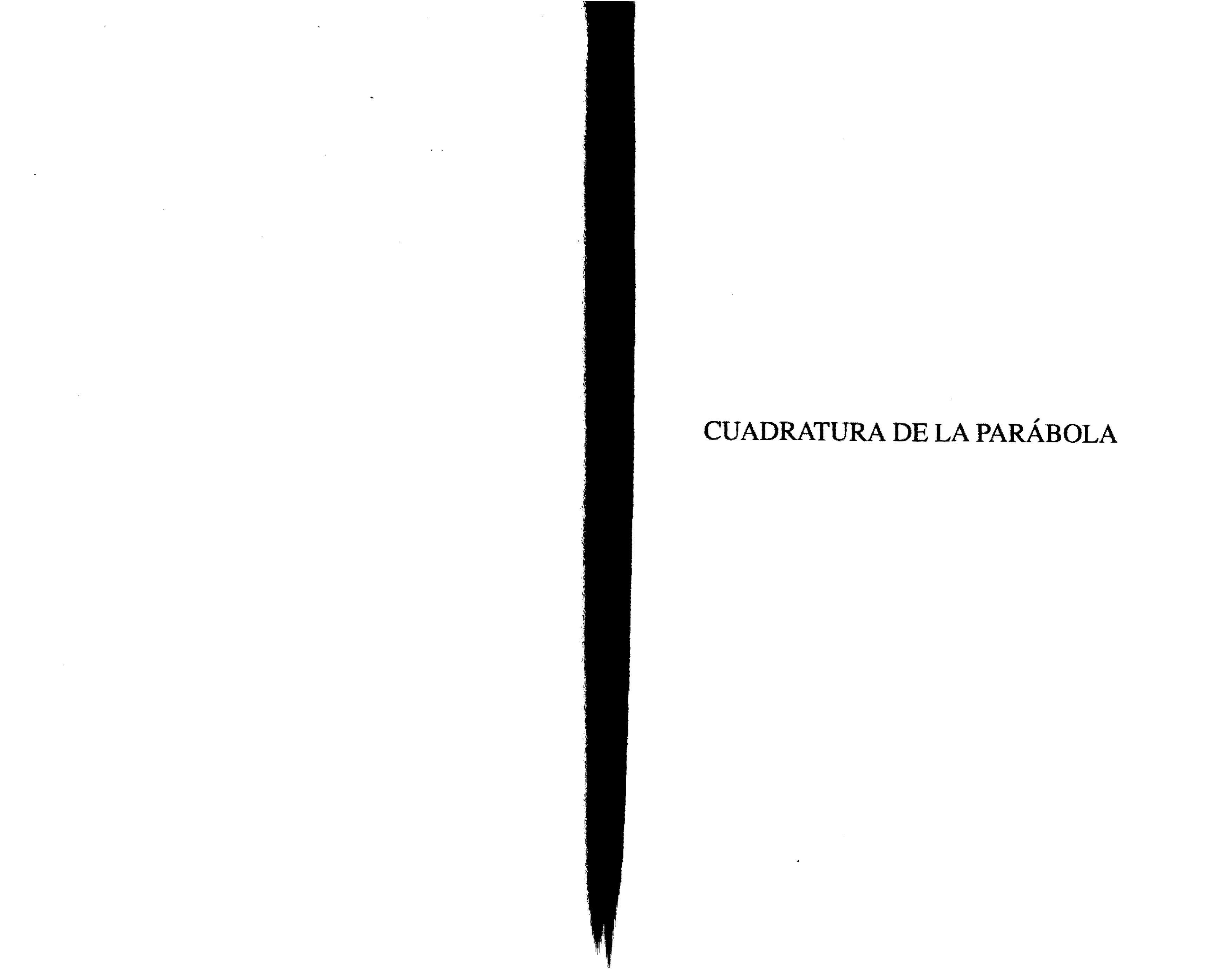
19 Y puesto que las 1.000 unidades de números séptimos son el quincuagésimo segundo elemento proporcional a partir de la unidad, mientras que la miríada de miríadas multiplicada por diez mil es el décimo tercer elemento a partir de la unidad en esa misma serie proporcional, está claro que el resultado será el sexagésimo cuarto elemento a partir de la unidad de esa misma serie proporcional; y éste es el octavo de los números octavos, que sería mil miríadas de números octavos. **258**

Es evidente por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de los astros fijos que Aristarco supone como hipótesis es inferior a 1.000 miríadas de números octavos.

20 Y esto, rey Gelón, supongo que no le parecerá fácilmente creíble al vulgo, que no ha tenido contacto con las matemáticas, pero a quienes han participado de ellas y han reflexionado sobre las distancias y tamaños de la Tierra y el Sol y la Luna y el mundo entero les resultará creíble gracias a la demostración.

Por eso precisamente pensé que tampoco a ti dejaría de convenirte conocer estos resultados.

[26] «De números séptimos», se entiende.



CUADRATURA DE LA PARÁBOLA

INTRODUCCIÓN

Entre las líneas de investigación seguidas por los matemáticos griegos, una de las que más ocasiones les dio para hacer brillar sus talentos fue, sin duda, la relacionada con la medida de las superficies y volúmenes delimitados total o parcialmente por curvas. Esto queda puesto de relieve por hechos como la posición preeminente que la cuadratura del círculo ocupa entre los problemas clásicos de la matemática griega o a la vista de la temática de las obras geométricas de Arquímedes: la medida del círculo, la esfera y el cilindro, conoides y esferoides, la medida de la parábola, las espirales. Cuando Arquímedes, según los relatos de Plutarco y Cicerón[1], pidió que figurara en su tumba la relación entre el cilindro y la esfera inscrita en él (uno de los principales resultados del tratado *Sobre la esfera y el cilindro)*, nos da otra muestra de ello.

Y es que todos los intentos de medir o «cuadrar» superficies y volúmenes delimitados por curvas anteriores a Arquímedes habían obtenido hasta entonces resultados insuficientes. El propio Arquímedes nos hace, con su siempre sorprendente concisión, un resumen de esos resultados en la carta a Dosíteo que precede a este tratado: se había conseguido demostrar «que los círculos guardan entre sí una razón que es el cuadrado de la de sus diámetros y que las esferas guardan entre sí una razón que

[1] *Cf.* vol. I, Introducción, págs. 14-15.

es el cubo de la de sus diámetros... y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cilindro e igual altura»[2], pero se había fracasado en «demostrar que era posible hallar un área rectilínea igual a un círculo dado o a un segmento dado de círculo»; y lo que es más: Arquímedes no tiene noticia de que «ninguno de los de antes intentara cuadrar el segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo». Y ese descubrimiento es el que comunica en este tratado: «todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura que el segmento». Éste fue el primero de los resultados que obtuvo gracias a su afamado método mecánico y Arquímedes debía de sentir un aprecio especial por él, pues lo hace constar dos veces en su correspondencia, una vez en esta carta a Dosíteo y otra en la carta a Eratóstenes que precede al *Método*.

Ésa es probablemente la razón de que Arquímedes incluya en esta obra tanto el procedimiento mecánico como la demostración geométrica pertinente, y eso es lo que da un carácter especial a la *Cuadratura de la parábola*, que es, junto con el *Método*, la obra de Arquímedes que más de cerca nos permite seguir el hilo de su pensamiento.

El tratado se abre con la exposición de ciertas propiedades de la parábola (props. 1-5)[3], a las que sigue el tratamiento mecánico de la cuestión (props. 6-17). En estas proposiciones recurriendo a teoremas ya probados en otros estudios sobre mecánica[4] va estudiando el equilibrio de triángulos rectángulos, triángulos obtusángulos y trapecios con otras magnitudes dadas

[2] Euclides recoge las demostraciones pertinentes en *Elementos* XII 2, XII 18 y XII 10, respectivamente.

[3] Las que se enuncian en las proposiciones 1-3 debían de ser conocidas, pues Arquímedes remite a unos *Elementos de cónicas* para las demostraciones de las mismas.

[4] Bajo referencias a una obra de título *Mecánica* menciona teoremas conservados en *Equilibrio de las figuras planas*.

(props. 9-13); estudia a continuación las condiciones de equilibrio de un triángulo rectángulo que comprende un segmento parabólico —el triángulo tiene la misma base que el segmento, la altura paralela al eje del segmento y tangente al segmento en uno de los extremos de su base y la hipotenusa tangente al segmento en el otro extremo de su base— con los trapecios construidos, según ciertos requerimientos, sobre segmentos iguales de la base del segmento parabólico, y llega a la conclusión de que el triángulo rectángulo en cuestión es inferior al triple de la suma de los trapecios considerados (prop. 14); en la prop. 15 hace un estudio semejante, pero con el segmento parabólico comprendido ahora por un triángulo obtusángulo, y llega de nuevo a la conclusión de que el triángulo es inferior al triple de la suma de los trapecios considerados; en la prop. 16 pasa a estudiar el equilibrio del segmento de parábola situado en el interior de un triángulo rectángulo como en la proposición 14 con un área igual a la tercera parte del triángulo rectángulo considerado, y llega a la conclusión de que el segmento parabólico y el área indicada se equilibrarían. El sistema seguido por Arquímedes hasta aquí parece un recurso al método de ensayo y error del que sólo se nos dieran a conocer los ensayos acertados.

A continuación, tomando como base cierta los resultados obtenidos —a pesar de ser consciente de que son matemáticamente insuficientes— la proposición 17, última de la primera parte, discurre ya por el camino geométrico: en ella prueba, sin recurrir a balanzas ni equilibrios, que el triángulo construido como en las proposiciones 14 y 16 es el cuádruple del triángulo inscrito en el segmento parabólico con la misma base que el segmento y la misma altura. Con ello queda alcanzado el resultado de la investigación, y puede iniciar la demostración sabiendo cuál es la tesis a la que se debe encaminar, tal y como él mismo lo cuenta en la carta que precede al *Método*: «Algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, porque la teoría por este método carece de demostración; y es más fácil

avanzar en la demostración de los hallazgos mediante cierto conocimiento gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada».

Así, al final de esta proposición aparecen las definiciones de los conceptos de base, altura y vértice del segmento parabólico, que encabezan la parte propiamente geométrica del tratado, las props. 18-24.

Con la economía de medios que le caracteriza y en un camino aparentemente zigzagueante, en ellas resuelve la determinación del vértice del segmento (prop.18); demuestra que la longitud de la recta trazada en el segmento parabólico desde el punto medio de la base hasta la parábola es cuatro tercios de la trazada desde el punto medio de la mitad (prop. 19); que el triángulo inscrito en el segmento, con su misma base y altura, es mayor que la mitad del segmento (prop. 20); que el triángulo inscrito en el segmento del modo indicado es el óctuplo de cada uno de los triángulos inscritos de modo semejante en los segmentos que deja a su alrededor (prop. 21); en la prop. 22 demuestra que si en el segmento parabólico se disponen áreas sucesivamente en la razón de cuatro a uno y la mayor de las áreas es igual al triángulo que tiene la misma base que el segmento y la misma altura, la suma de todas las áreas será menor que el segmento[5]; en la prop. 23 prueba que el resultado de la suma de una serie de elementos en la proporción de cuatro a uno más la tercera parte de la menor es cuatro tercios de la mayor y en la prop. 24 alcanza la demostración del resultado anticipado en la prop. 18.

El texto conserva el dialecto dorio de Arquímedes, mas no sucede así con el título —Eutocio lo cita en sus *Comentarios*

[5] El aserto aparece en forma general en ARISTÓTELES, *Física* III 206b6-10: «si en una magnitud finita se toma una cantidad y se sigue tomando en la misma proporción, siempre que no se tome la misma fracción del todo, no se recorrerá hasta el final la magnitud finita».

llamándolo *Sobre la sección del cono rectángulo*[6]—, que debió de ser alterado en algún momento de la transmisión adaptándolo a la terminología acuñada por Apolonio. Para referirse a la parábola Arquímedes usa a lo largo de toda la obra la expresión *orthogōníou kṓnou tomá* («sección del cono rectángulo»), y hemos optado por conservar el arcaísmo terminológico dado que su uso no estorba la comprensión del texto[7]. Para el título conservamos el término empleado en griego por respeto al original y a la tradición de los traductores anteriores.

[6] Concretamente en uno de los pasajes relativos a *Cuerpos flotantes* II 8, bajo la forma *Perì tês orthogōníou kṓnou tomês* (es decir, utilizando ya el dialecto de la *koiné* en lugar del dorio *tâs... tomâs*); el título que figura en los manuscritos es *Tetragōnismòs parabolês*.

[7] Al revés de lo que sucedía en *Sobre conoides y esferoides* (*cf.* vol. I, Introducción, págs. 47-48).

Arquímedes a Dosíteo, ¡salud! II 262

Al oír que había muerto Conón, cuya amistad nunca me faltó, y que tú habías conocido a Conón y que estabas familiarizado con la geometría, me entristecí por el difunto en su calidad de amigo y de hombre que ha llegado a ser admirable en matemáticas, y me propuse enviarte por escrito, igual que solía escribir a Conón, teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados, pero que ahora han sido estudiados por mí, habiéndolos descubierto primero mediante el método mecánico y habiéndolos demostrado después por el método geométrico.

Algunos de los que se ocuparon de la geometría en fechas anteriores intentaron demostrar que era posible hallar un área rectilínea igual a un círculo dado o a un segmento dado de círculo, y después de eso intentaron cuadrar el área comprendida por una sección cónica en general[1] y una recta, pero aceptaron le-

---

[1] Aceptamos la conjetura *hypò tâs kathólou kṓnou tomâs* propuesta por CH. MUGLER, «Sur un passage d'Archiméde», *Revue des Études Grecques* 86 (1973) 45-47. Los mss. ofrecen la lectura *tâs toû hólou kṓnou tomâs* (literalmente, «la sección de un cono entero»), considerada incomprensible por todos los editores ya que 1) no puede referirse a una parábola, puesto que Arquímedes dice que él es el primero en intentarlo; 2) ni tampoco a la sección que corta al cono entero —es decir, a la elipse, interpretando que la «línea recta» sería un eje o un diámetro—, ya que, como objeta Heiberg, la expresión *tâs toû oxygōníou kṓnou tomâs* significa siempre «la elipse entera», no uno de sus segmentos. En

264 mas[2] difícilmente admisibles, por lo cual la mayoría consideró que no lo habían descubierto.

Desde luego[3], no sabemos de ninguno de los de antes que intentara cuadrar el segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo[4], que es lo que yo ahora he descubierto. Se demuestra que todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura que el segmento, aceptando para la demostración el siguiente lema: en las superficies desiguales, es posible que el exceso en que excede la mayor a la menor, si se va sumando a sí mismo, exceda a cualquier área limitada propuesta. También los geómetras anteriores utilizaron este lema, y demostraron que los círculos guardan entre sí una razón que es la de los cuadrados construidos sobre sus diámetros y que las esferas guardan entre sí una razón que es la de los cubos construidos sobre sus diámetros, y también que toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura. Y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cilindro e igual altura lo demostraron admitiendo un lema semejante al mencionado. Y ocurre que se da crédito a cada uno de los teoremas antedichos no menos que a los que se demues-

defensa de su conjetura Mugler argumenta que, como el círculo puede ser considerado también una cónica —resultante de la intersección del cono por un plano perpendicular al eje—, la distinción establecida por Arquímedes toma la forma de una oposición entre la cuadratura de la cónica especial que es el círculo, de una parte, y la cuadratura de las secciones cónicas en general —la elipse, la hipérbola y la parábola— (recuérdese que Arquímedes no puede tener en mente las curvas en el sentido de las definiciones dadas por Apolonio, posterior a él).

[2] El gr. *lêmma* designa un teorema auxiliar al que se recurre en una demostración.

[3] Acepto la conjetura δή propuesta por MUGLER, *art. cit.*, en sustitución de la lectura δὲ que ofrecen los mss.

[4] Sobre el uso de «parábola» y «sección del cono rectángulo», *cf.* la INTRODUCCIÓN a este tratado, págs. 158-159.

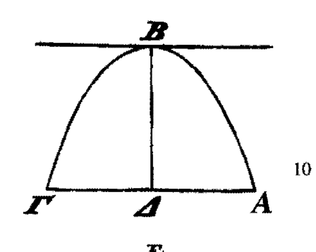
tran sin este lema. Basta, pues, con que los que publico sean llevados a un grado de credibilidad semejante.

Tras redactar la demostración de éste, te lo envío prime- 266
ro como fue resuelto mediante la mecánica, y después también como se demuestra mediante la geometría. Van al principio también algunos puntos elementales de cónicas[5] que son necesarios para la demostración.

Que sigas bien.

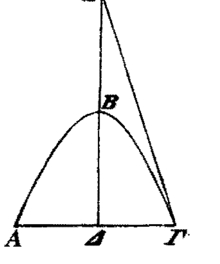
PROPOSICIÓN 1

Si hay una sección de un cono rectángulo, en la que figura $AB\Gamma$, y $B\Delta$ es paralela al diámetro[6] *o el propio diámetro y la recta $A\Gamma$ es paralela a la tangente en B a la sección, $A\Delta$ será igual a $\Delta\Gamma$. Y si $A\Delta$ es igual a $\Delta\Gamma$, serán paralelas $A\Gamma$ y la tangente en B a la sección* [Apolonio, *Cónicas* I 46].



PROPOSICIÓN 2

Si $AB\Gamma$ es una sección de cono rectángulo y la recta $B\Delta$ es paralela al diámetro o el propio diámetro y $A\Delta\Gamma$ es

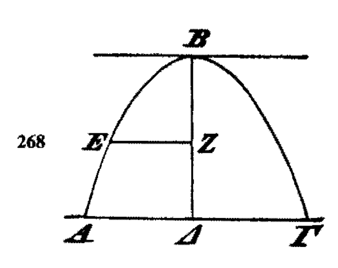


[5] Esos «puntos elementales» (gr. *stoicheîa)* son las tres primeras proposiciones, de las que figura sólo el enunciado. Las demostraciones de las mismas las conocemos en la versión de Apolonio de Perga, aunque es probable que figurasen en otras obras «elementales» sobre cónicas que no han llegado hasta nosotros, como las que sabemos que escribieron Euclides y Aristeo.

[6] Se refiere al diámetro principal de la parábola, es decir, al eje; *cf.* vol. I, Introducción, págs. 47-48, y también *Equilibrio de las figuras planas* II 10 y n. 32.

paralela a la tangente en B a la sección cónica, y EΓ es tangente a la sección cónica en Γ, las rectas BΔ, BE serán iguales [Apol., *Cón.* I 35].

Proposición 3

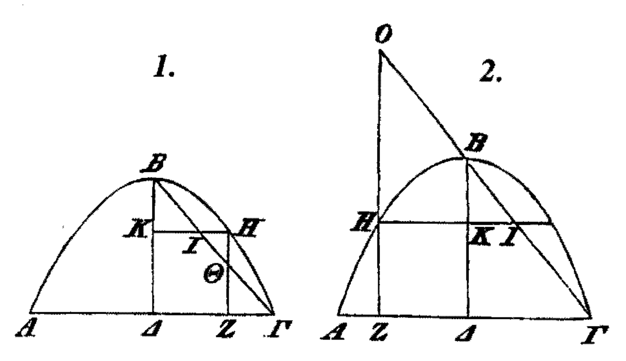


Si ABΓ es una sección de cono
rectángulo y la recta BΔ es parale-
la al diámetro o el propio diámetro
y se trazan unas rectas AΔ, EZ pa-
268 *ralelas a la tangente en B a la sec-*
ción del cono, BΔ será a BZ como
el cuadrado de AΔ al cuadrado de
EZ [Apol., *Cón.* I 20].

Estas cosas se demuestran en los *Elementos de Cónicas.*

Proposición 4

Sea ABΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo y desde el punto medio de AΓ trácese BΔ paralela al diámetro o sea ella misma el diámetro, y prolónguese la recta BΓ una vez trazada.



Si se traza otra recta ZΘ paralela a BΔ que corte a la recta que pasa por B, Γ, guardará la misma razón ZΘ con ΘH que ΔA con ΔZ.

Trácese KH paralela a AΓ por el punto H. Entonces BΔ será
a BK en longitud como el cuadrado de ΔΓ al cuadrado de KH
—pues esto se ha demostrado [Prop. 3]—. Por tanto, BΓ será a
BI en longitud como el cuadrado de BΓ al cuadrado de BΘ
—pues ΔZ, KH son iguales—. Por tanto las líneas BΓ, BΘ, BI
están en proporción. De modo que BΓ guarda con BΘ la misma
razón que ΓΘ con ΘI. Por tanto, ΓΔ es a ΔZ como ΘZ a ΘH. Y 270
ΔA es igual a ΔΓ.

Por tanto es evidente que ΔA guarda con ΔZ la misma razón que ZΘ con ΘH.

Proposición 5

Sea un segmento ABΓ comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, y desde A trácese ZA paralela al diámetro y desde Γ trácese ΓZ tangente a la sección cónica en el punto Γ. Si en el triángulo ZAΓ se trazara una recta paralela a AZ, la recta será cortada por la sección del cono rectángulo en la misma razón que AΓ por la recta trazada, y el segmento de AΓ que está junto a A se corresponderá con el segmento de la recta trazada que está junto a A.

Trácese una recta ΔE paralela a AZ, y corte primero ΔE a AΓ por la mitad.

Puesto que ABΓ es una sección de un cono rectángulo y BΔ ha sido trazada paralela al diámetro y dado que AΔ, ΔΓ son iguales, la tangente en B a la sección del cono rectángulo será paralela a AΓ. A la vez, puesto que ΔE es paralela al diámetro y dado que desde Γ

se ha trazado ΓE tangente a la sección del cono rectángulo en el punto Γ, mientras que ΔΓ es paralela a la tangente en B, la recta EB será igual a BΔ. De modo que AΔ guarda con ΔΓ la misma razón que ΔB con BE.

Ha quedado demostrado el caso de que la recta trazada corte por la mitad a AΓ.

272 Y si no es así, trácese otra recta KΛ paralela a AZ.

Se ha de demostrar que AK guarda la misma razón con KΓ que KΘ con ΘΛ.

Puesto que BE es igual a BΔ, también IΛ es igual a KI, pues ΛK guarda con KI la misma razón que AΓ con ΔA. Y también KI guarda con KΘ la misma razón que ΔA con AK —pues se ha demostrado en la proposición anterior—. De modo que KΘ guarda con ΘΛ la misma razón que AK con KΓ.

Por tanto, ha quedado demostrado lo propuesto.

Proposición 6

Considérese el plano[7] propuesto[8] perpendicular al horizonte[9], y[10] de la línea AB considérese hacia abajo la parte que está hacia el lado de Δ, y la del otro lado, hacia arriba, y sea un triángulo rectángulo BΔΓ con el ángulo recto con vértice en B y el lado BΓ igual a la mitad de la balanza[11], y suspéndase el triángulo de los puntos B, Γ y suspéndase otra área Z de la otra parte de la balanza, del punto A, y quede en equilibrio el área Z colgada del punto A con el triángulo BΔΓ en la posición en que está ahora.

[7] [*El que está en la parte teórica*].

[8] [*Visto*].

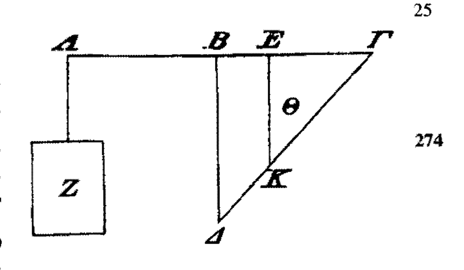
[9] Recuérdese que Arquímedes es consciente de que la posición del cuerpo que pende de uno de los brazos de la balanza es significativa al efecto de obtener o conservar el equilibrio de la misma.

[10] [*Luego*].

[11] [*Evidentemente, siendo igual AB a BΓ*].

Afirmo que el área Z es la tercera parte del triángulo BΔΓ.

Dado que se ha supuesto que la balanza está en equilibrio, la línea AΓ sería paralela al horizonte y las rectas trazadas perpendiculares a AΓ en el plano perpendicular al horizonte serán perpendiculares al horizonte. 274 Córtese la línea BΓ por el punto E de modo que ΓE sea el doble de EB



y trácese la recta KE paralela a ΔB y córtesela por la mitad por el punto Θ. Entonces el punto Θ es el centro de gravedad del triángulo BΔΓ —eso se ha demostrado en la *Mecánica*[12]—. Por tanto, si se soltara la sujeción del triángulo BΔΓ en los puntos B, Γ y se colgara del punto E, el triángulo permanecerá como está. Pues todo objeto colgado permanece en el punto en que está colgado de modo que el punto de suspensión y el centro de gravedad del objeto colgado estén en perpendicular —pues esto también se ha demostrado[13]—. Así pues, dado que el triángulo BΔΓ tendrá la misma posición en la balanza, el área Z estará igualmente en equilibrio. Puesto que el área Z colgada del punto A y el triángulo BΔΓ colgado de E están en equilibrio, es evidente que las longitudes[14] estarán en proporción inversa y que AB es a BE como el triángulo BΔΓ al área Z. Y AB es el triple de BE; luego también el triángulo BΔΓ es el triple del área Z.

Y es evidente también que guardarán el equilibrio si el triángulo BΔΓ fuera el triple del área Z.

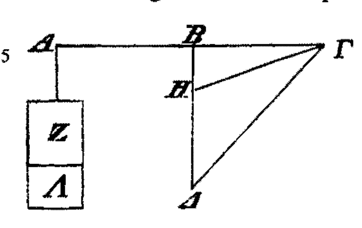
[12] La demostración figura en *Equilibrio de las figuras planas* I 14.

[13] Esa demostración no ha llegado hasta nosotros; Heiberg supone que Arquímedes se refiere a una obra anterior sobre los centros de gravedad.

[14] «De los brazos de la balanza», se entiende.

Proposición 7

Sea de nuevo la línea AΓ una balanza y sea B su punto medio, y esté suspendida del punto B[15], y sea ΓΔH un triángulo obtusángulo que tenga por base ΔH y por altura una recta igual 276 a la mitad de la balanza, y cuélguese el triángulo ΔΓH de los puntos BΓ, y esté en equilibrio el área Z colgada del punto A con el triángulo ΓΔH en la posición que ocupa ahora.



De la misma manera se demostrará que el área Z es la tercera parte del triángulo ΓΔH.

Cuélguese también del punto A otra área que sea la tercera parte del triángulo BΓH y el triángulo BΔΓ estará en equilibrio con ZΛ. Puesto que el triángulo BΓH se equilibra con Λ, mientras que el BΓΔ se equilibra con ZΛ, y ZΛ es la tercera parte del triángulo BΓΔ, está claro también que el triángulo ΓΔH es el triple de Z.

Proposición 8

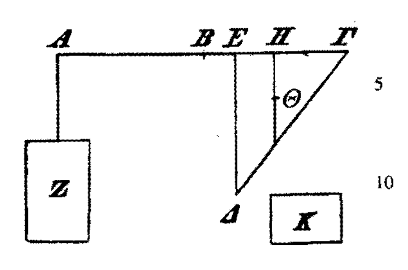
Sea ABΓ una balanza y B su punto medio, y esté suspendida del punto B, y sea ΓΔE un triángulo rectángulo que tenga recto el ángulo de vértice en E, y cuélguese en la balanza de los puntos Γ, E, y el área Z cuélguese del punto A y esté en equilibrio con ΓΔE en la posición que ocupa ahora, y guarde el triángulo ΓΔE con el área K la razón que guarda AB con BE.

Digo que el área Z es menor que el triángulo ΓΔE pero mayor que K.

Tómese el centro de gravedad del triángulo ΔEΓ y sea Θ, y trácese ΘH paralela a ΔE.

[15] [*El triángulo ΓΔH*].

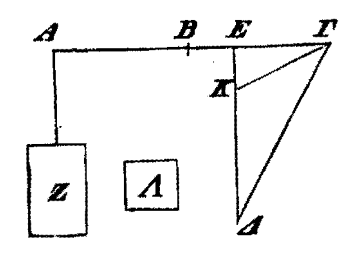
Puesto que el triángulo ΓΔE está en equilibrio con el área Z, guarde el área ΓΔE con el área Z la misma razón que AB con BH. 278



De manera que Z es menor que ΓΔE. Y puesto que el triángulo ΓΔE guarda con Z la misma razón que BA con BH y con K la misma que BA con BE, está claro que el triángulo ΓΔE guarda con K una razón mayor que con Z. De modo que Z es mayor que K.

Proposición 9

Sea de nuevo AΓ una balanza y B su punto medio, y ΓΔK un triángulo obtusángulo que tenga por base ΔK y por altura EΓ, y cuélguese de la balanza por los puntos Γ, E y cuélguese el área Z del punto A y esté en equilibrio con el triángulo ΔΓK en la posición en que está ahora, y guarde el triángulo ΓΔK con Λ la razón que guarda AB con BE.



Digo que Z es mayor que Λ pero menor que ΔΓK.

Se demostrará de manera semejante a la proposición anterior.

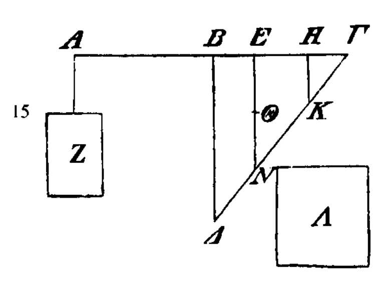
Proposición 10

Sea de nuevo ABΓ una balanza y B su punto medio, y BΔHK un trapecio que tenga rectos los ángulos con vértices en los

280 puntos B, H y el lado KΔ inclinado[16] hacia Γ, y guarde el trapecio BΔKH con Λ la razón que guarda AB con BH, y cuélguese de la balanza el trapecio BΔHK por los puntos B, H, y cuélguese también el área Z por el punto A y quede en equilibrio con el trapecio BΔKH en la posición que se ha supuesto ahora.

Digo que el área Z es menor que el área Λ.

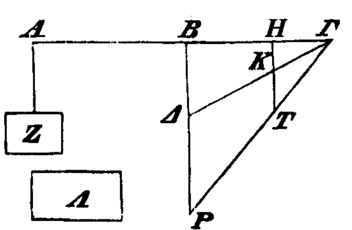
Córtese AΓ por el punto E de manera que EH guarde con BE la razón que guarda la suma del doble de ΔB más KH con la suma del doble de KH más BΔ, y córtese en dos partes iguales por el punto Θ la recta EN, trazada paralela a BΔ por el punto E; y Θ es el centro de gravedad del trapecio BΔHK —pues esto se ha demostrado en la *Mecánica* [*Equil. plan.* I 15]—. Entonces, si se cuelga del punto E el trapecio BΔHK y se suelta de los puntos B, H sigue teniendo la misma posición por la misma razón que en lo anterior[17] y está en equilibrio con el área Z. Puesto que el trapecio BΔHK colgado de E está en equilibrio con el área Z colgada de A, la recta AB será a BE como el trapecio BΔHK al área Z.



Luego el trapecio BΔHK guarda con el área Z una razón mayor que con Λ, puesto que también AB guarda con BE una razón mayor que con BH. De modo que Z será menor que Λ.

Proposición 11

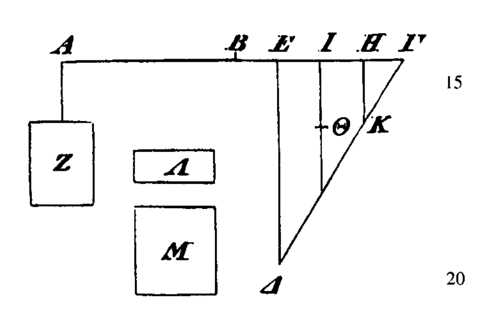
Sea de nuevo AΓ una balanza y B su punto medio, y sea
282 KΔTP un trapecio con los lados KΔ, TP inclinados hacia Γ, y los lados ΔP, KT perpendiculares a BΓ, e incida ΔP en el punto B y guarde el trapecio ΔKTP con el área Λ la misma razón que guarda AB con BH, y cuélguese el trapecio ΔKTP de la balanza por los puntos B, H y el área Z por el punto A y quede en equilibrio el área Z con el trapecio ΔKPT en la posición en que está ahora.



De modo semejante a las proposiciones anteriores se demostrará que el área Z es menor que Λ.

Proposición 12

Sea de nuevo AΓ una balanza y B su punto medio, y sea ΔEKH un trapecio que tenga rectos los ángulos de vértice en E, H y las líneas KΔ, EH inclinadas hacia Γ, y guarde el trapecio ΔKEH con el área M la misma razón que guarda AB con BH, y guarde el trapecio ΔKEH con el área Λ la misma razón que guarda AB con BE, y cuélguese de la balanza el trapecio ΔKEH por los puntos E, H y el área Z cuélguese del punto A y esté en equilibrio con el trapecio en la posición que ahora se supone.



Digo que Z es mayor que Λ, pero menor que M.

Pues tomé el centro de gravedad del trapecio ΔKEH, sea el punto Θ —se tomará de la misma manera que en la proposición anterior [*Equil. plan.* I 15]— y trazo la recta ΘI paralela a ΔE.
Si el trapecio se colgara de la balanza por el punto I y se soltara 284

[16] Gr. *neúousan*, aquí con su significado literal.

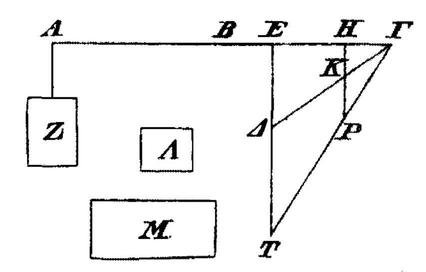
[17] *Cf.* Prop. 7 (274, 12 y ss.).

de E, H, permanecerá en la misma posición y estará en equilibrio con Z por las mismas razones que en lo anterior. Y puesto que el trapecio colgado por el punto I está en equilibrio con Z colgado por el punto A, el trapecio guardará con Z la misma razón que AB con BI.

Está claro por tanto que el trapecio ΔKEH guarda con Λ una razón mayor que con Z, pero con M una menor que con Z. De modo que Z es mayor que Λ, pero menor que M.

PROPOSICIÓN 13

Sea de nuevo AΓ una balanza y esté B en su punto medio, y sea KΔTP un trapecio de modo que sus lados KΔ, TP estén inclinados hacia Γ, mientras que los lados ΔT, KP son perpendiculares a BΓ, y cuélguese de la balanza por los puntos E, H, y el área Z cuélguese por el punto A y esté en equilibrio con el trapecio ΔKTP en la posición en que está ahora, y guarde el trapecio ΔKTP con el área Λ la razón que guarda AB con BE, y guarde ese mismo trapecio con M la razón que guarda AB con BH.

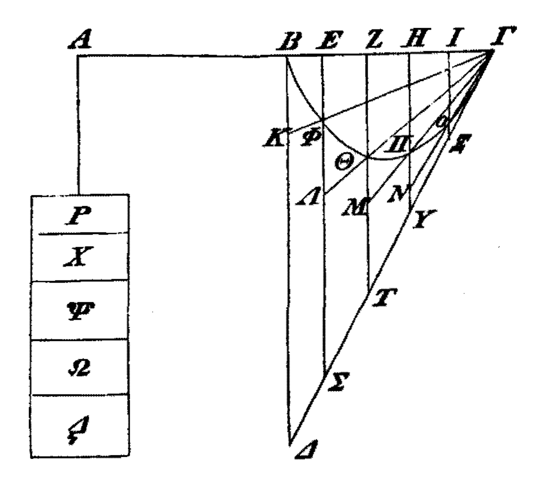


De manera semejante a la proposición anterior se demostrará que Z es mayor que Λ pero menor que M.

PROPOSICIÓN 14

Sea BΘΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo. Sea primero BΓ perpendicular al diámetro y desde el punto B trácese BΔ paralela al diámetro, y desde el punto Γ trácese ΓΔ tangente a la sección del cono en el 286 punto Γ. Entonces BΓΔ será un triángulo rectángulo. Divídase BΓ en un número cualquiera de segmentos iguales BE, EZ, ZH, HI, IΓ y desde los puntos de corte trácense paralelas al diámetro EΣ, ZT, HΥ, IΞ y desde los puntos en que éstas cortan a la sección del cono trácense líneas que se unan con Γ y prolónguense.

Digo que el triángulo BΔΓ es menor que el triple de ⟨la suma de⟩ los trapecios KE, ΛZ, MH, NI más el triángulo ΞIΓ, pero mayor que el triple ⟨de la suma⟩ de los trapecios ZΦ, HΘ, IΠ más el triángulo IOΓ.



Trácese la recta ABΓ y tómese AB igual a BΓ, y considérese AΓ una balanza. Su punto medio será B; y cuélguese[18] del punto B, y cuélguese de la balanza también el triángulo BΔΓ

[18] «La balanza», se entiende.

por los puntos B, Γ, y del otro lado de la balanza cuélguense por el punto A las áreas P, X, Ψ, Ω, ϡ, y esté en equilibrio el área P con el trapecio ΔE en esa posición, el área X con el trapecio ZΣ, el área Ψ con el TH, el área Ω con el ϒI, el área ϡ con el triángulo ΞIΓ.

Entonces también estará en equilibrio el todo con el todo. De manera que el triángulo BΔΓ sería el triple del área ⟨suma de⟩ PXΨΩϡ. Y puesto que BΓΘ es un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo y desde el punto B ha sido trazada BΔ paralela al diámetro y desde el punto Γ ha sido trazada ΓΔ tangente a la sección del cono en el punto Γ y se ha trazado también otra recta ΣE paralela al diámetro, BΓ guarda con BE la misma razón que ΣE con EΦ. De modo que también BA guarda con BE la misma razón que el trapecio ΔE con el KE.

288 Del mismo modo se demostrará que la recta AB guarda con BZ la misma razón que el trapecio ΣZ con el ΛZ; con la recta BH, la ⟨misma⟩ que el trapecio TH con el MH; con la recta BI, la ⟨misma⟩ que el trapecio ϒI con el NI. Por tanto, puesto que ΔE es un trapecio que tiene rectos los ángulos de vértice en B, E y los lados inclinados hacia Γ, y un área P colgada de la balanza por el punto A está en equilibrio con él estando el trapecio en la posición en que está ahora, y puesto que la recta BA es a la recta BE como el trapecio ΔE es al KE, entonces el área KE es mayor que el área P —pues eso también se ha demostrado [Prop. 10].

De nuevo, también el trapecio ZΣ, que tiene rectos los ángulos de vértice en Z, E y el lado ΣT inclinado hacia Γ, está en equilibrio con el área X colgada de la balanza por el punto A, estando el trapecio en la posición en que está ahora, y AB es a BE como el trapecio ZΣ es al ZΦ, mientras que AB es a BZ como el trapecio ZΣ es al ΛZ. Entonces el área X sería menor que el trapecio ΛZ, pero mayor que el ZΦ —pues eso también se ha demostrado [Prop. 12].

Por la misma razón, también el área Ψ será menor que el trapecio MH, pero mayor que el ΘH; y el área Ω será menor que

el trapecio NOIH, pero mayor que el ΠI; y de la misma manera **29** también el área ϡ será menor que el triángulo ΞIΓ, pero mayor que el ΓIO.

Por tanto, puesto que el trapecio KE es mayor que el área P y el trapecio ΛZ es mayor que X y el MH es mayor que Ψ y el NI es mayor que Ω y el triángulo ΞIΓ es mayor que ϡ, es evidente que la suma de todas las áreas indicadas es mayor que el área ⟨suma de⟩ PXΨΩϡ Y el área PXΨΩϡ es la tercera parte del triángulo BΓΔ. Luego está claro que el triángulo BΓΔ es menor que el triple de ⟨la suma de⟩ los trapecios KE, ΛZ, MH, NI más el triángulo ΞIΓ. A la vez, puesto que el trapecio ZΦ es menor que el área X y el ΘH menor que el área Ψ y el IΠ menor que el área Ω, y el triángulo IOΓ menor que el área ϡ, es evidente que ⟨la suma de⟩ todas las figuras indicadas es menor que el área ϡΩΨX.

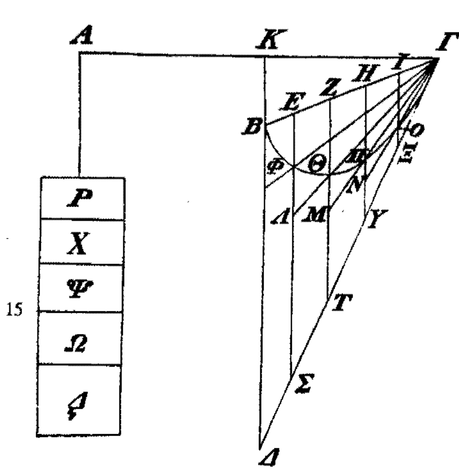
Así pues, es evidente también que el triángulo BΔΓ es mayor que el triple de ⟨la suma de⟩ los trapecios ΦZ, ΘH, IΠ más el triángulo IΓO, pero menor que el triple de los antes mencionados.

Proposición 15

Sea de nuevo BΓΘ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo y no sea la recta BΓ perpendicular al diámetro. Es de necesidad entonces que la recta trazada desde el punto B paralela al diámetro por el mismo lado en que está el segmento o la trazada desde Γ formen con la recta BΓ un ángulo obtuso. Sea la que está en B la que forme el ángulo obtuso y desde B trácese BΔ paralela al diámetro y desde Γ trácese ΓΔ tangente en el punto Γ a la sección del cono y divídase BΓ en un número cualquiera de segmentos iguales BE, EZ, ZH, HI, IΓ, y por los puntos E, Z, H, I trácense paralelas al diámetro las rectas EΣ, ZT, Hϒ, IΞ, y desde los puntos en que éstas cortan a la sección del cono trácense rectas hasta Γ y prolónguense.

Afirmo también ahora que el triángulo BΔΓ es menor que el triple de ⟨la suma de⟩ los trapecios BΦ, ΛZ, MH, NI más el triángulo ΓIΞ, pero mayor que el triple de ⟨la suma de⟩ los trapecios ZΦ, HΘ, IΠ más el triángulo ΓOI.

Prolónguese en ambos sentidos ΔB. Tras haber trazado la perpendicular ΓK he tomado AK igual a ΓK. Considérese de nuevo AΓ una balanza y K su punto medio y cuélguese[19] del punto K y cuélguese también el triángulo ΓKΔ de la mitad de la balanza por los puntos Γ, K, estando como está ahora, y de la otra parte de la balanza cuélguense del punto A las áreas P, X, Ψ, Ω, ϡ y esté en equilibrio el área P con el trapecio ΔE en la posición en que está ahora, el área X con el trapecio ZΣ, el área Ψ con el TH, el área Ω con el ΥI y el área ϡ con el triángulo ΓIΞ. También estará en equilibrio el total con el total. De modo que también el triángulo ΔBΓ será el triple del área ⟨suma de⟩ PXΨΩϡ [Prop. 7]. De manera semejante a la proposición anterior se demostrará que el trapecio BΦ es mayor que el área P, y que el trapecio ΘE es mayor que el área X, pero el área ZΦ es menor[20]; y que el trapecio MH es mayor que el área Ψ, pero el
294 trapecio HΘ menor[21]; y además, que el trapecio NI es mayor que el área Ω, pero el ΠI, menor ⟨que ella⟩; y que el triángulo



[19] «La balanza», se entiende.

[20] «Menor que X», se entiende.

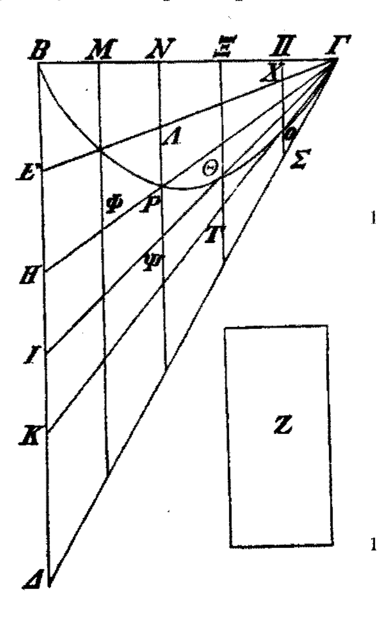
[21] Entiéndase «menor que el área Ψ».

ΞIΓ es mayor que el área ϡ, pero el triángulo ΓIO, menor ⟨que ella⟩.

Por tanto, está claro.

Proposición 16

Sea de nuevo BΘΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, y trácese por el punto B la recta BΔ paralela al diámetro y desde el punto Γ la recta ΓΔ tangente a la sección del cono en el punto Γ, y sea el área Z la tercera parte del triángulo BΔΓ.



Digo que el segmento BΘΓ es igual al área Z.

Pues si no es igual, ciertamente es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

El exceso en que excede el segmento BΘΓ al área Z sumado a sí mismo llegará a ser mayor que el triángulo BΓΔ. Y es posible tomar un área menor que el exceso que sea parte[22] del triángulo BΔΓ.

[22] El término empleado aquí por Arquímedes es *méros*; su equivalente más próximo en terminología moderna sería «submúltiplo», con la particularidad de que el término «submúltiplo» se emplea de modo casi exclusivo para números, no para magnitudes geométricas. Del uso del término *méros* en la matemática antigua pueden verse ejemplos en Euclides, *Elementos* I def. 17, post. 5, props. 7, 36; VII defs. 3 y 4 y props. 4, 5, 7, etc. *Cf.* en esta misma colección (BCG 191) la traducción de M. L. Puertas Castaños, Madrid, 1994.

Sea el triángulo ΒΓΕ menor que el exceso indicado y parte del triángulo ΒΓΔ. Entonces, la recta ΒΕ será la misma parte de la recta ΒΔ. Divídase ΒΔ en las partes ⟨correspondientes⟩ y sean Η, Ι, Κ los puntos de las divisiones, y desde los puntos Η, Ι, Κ trácense rectas que los unan con Γ. Éstas cortan a la sección del cono, puesto que la recta ΓΔ es tangente a ella en el punto Γ. Y
296 por los puntos en que las rectas cortan a la sección trácense paralelas al diámetro las rectas ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ. Éstas serán también paralelas a ΒΔ.

Puesto que el triángulo ΒΓΕ es menor que el exceso en que el segmento ΒΘΓ excede al área Ζ, está claro que la suma del área Ζ más el triángulo ΒΓΕ es menor que el segmento. E igual al triángulo ΒΓΕ es ⟨la suma de⟩ los trapecios por los que pasa la sección del cono —ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ— más el triángulo ΓΟΣ, pues el trapecio ΜΕ es común, el ΜΛ es igual al ΦΛ y el ΛΞ es igual al ΘΡ y el ΧΞ es igual al ΟΘ y el triángulo ΓΧΠ ⟨igual⟩ al triángulo ΓΟΣ. Y el área Ζ es menor que ⟨la suma de⟩ los trapecios ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ más el triángulo ΠΟΓ. Y el triángulo ΒΔΓ es el triple del área Ζ. Así que el triángulo ΒΔΓ es menor que el triple de los trapecios ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ más el triángulo ΠΟΓ. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que era mayor que el triple.

Por tanto el segmento ΒΘΓ no es mayor que el área Ζ.

Afirmo que tampoco es menor.

Pues sea, si es posible, menor.

De nuevo, sumado a sí mismo el exceso en que excede el área Ζ al segmento ΒΘΓ, excede también al triángulo ΒΔΓ. Y es posible tomar un área menor que el exceso que sea parte del triángulo ΒΔΓ. Sea el triángulo ΒΓΕ menor que el exceso y parte del triángulo ΒΔΓ y constrúyase igual lo demás.

Puesto que el triángulo ΒΓΕ es menor que el exceso en que excede el área Ζ al segmento ΒΘΓ, ⟨la suma del⟩ triángulo ΒΕΓ
298 y el segmento ΒΘΓ son menores que el área Ζ. Y el área Ζ también es menor que ⟨la suma de⟩ los cuadriláteros ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ más el triángulo ΓΠΣ. Pues el triángulo ΒΔΓ es el triple del área Ζ, pero menor que el triple de las áreas indicadas, como se demostró en la proposición anterior a ésta[23].

Por tanto, ⟨la suma⟩ del triángulo ΒΓΕ más el segmento ΒΘΓ es menor que ⟨la suma de⟩ los cuadriláteros ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ más el triángulo ΓΠΣ. Por tanto, restando en común[24] el segmento, el triángulo ΓΒΕ sería menor que las áreas que quedan en torno. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que el triángulo ΒΕΓ era igual a ⟨la suma de⟩ los trapecios ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ más el triángulo ΓΟΣ, que son mayores que las áreas que quedan en torno.

Por tanto, el segmento ΒΘΓ no es menor que el área Ζ. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego el segmento es igual al área Ζ.

Proposición 17

Demostrado esto, está claro que todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura que el segmento.

Sea un segmento comprendido por una recta y una sección de un cono rectángulo, y sea su vértice el punto Θ, e inscríbase en él el triángulo ΒΘΓ que tenga la misma base e igual altura que el segmento. Puesto que el punto Θ es el vértice del segmento, la recta trazada desde Θ paralela al diámetro corta por la mitad a ΒΓ, y la recta ΒΓ es paralela a la tangente a la sección en el punto Θ. Trácese ΕΘ paralela al diámetro y desde Β trácese también ΒΔ paralela al diámetro y, desde Γ, ΓΔ tangente a la sección del cono en el punto Γ.

Puesto que ΚΘ es paralela al diámetro y ΓΔ tangente a la

[23] En las props. 14 y 15.

[24] Es decir, «restando en ambos miembros de la desigualdad».

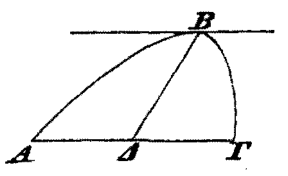
sección en el punto Γ, y EΓ es paralela a la tangente a la sección en el punto Θ, el triángulo BΔΓ es el cuádruple del triángulo BΘΓ. Y puesto que el triángulo BΔΓ es el triple del segmento BΘΓ y el cuádruple del triángulo BΘΓ, es evidente que el segmento BΘΓ es cuatro tercios del triángulo BΘΓ.

De los segmentos comprendidos por una recta y una línea curva, llamo base a la recta; altura, a la perpendicular mayor trazada desde la curva hasta la base del segmento; vértice, al punto desde el cual se traza la perpendicular mayor.

PROPOSICIÓN 18

Si en un segmento que está comprendido por una recta y una sección de un cono rectángulo se traza una recta paralela al diámetro desde la mitad de la base, el vértice del segmento será el punto en el que la recta trazada paralela al diámetro corta a la sección del cono.

Sea ABΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, y desde el centro de AΓ trácese ΔB paralela al diámetro.



302 Puesto que en una sección de cono rectángulo ha sido trazada BΔ paralela al diámetro y las rectas AΔ, ΔΓ son iguales, es evidente que AΓ y la tangente a la sección del cono en el punto B son paralelas.

Está claro por tanto que de las perpendiculares trazadas desde la sección del cono hasta AΓ la mayor será la trazada desde B. Por tanto B es el vértice del segmento.

PROPOSICIÓN 19

En un segmento comprendido por una recta y una sección de un cono rectángulo la recta trazada desde el punto medio de la base[25] *será en longitud cuatro tercios de la trazada desde el punto medio de la mitad*[26].

Sea ABΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, y trácese la recta BΔ paralela al diámetro desde el punto medio de AΓ, la recta EZ desde el punto medio de AΔ y trácese también ZΘ paralela a AΓ.

Puesto que en una sección de cono rectángulo ha sido trazada BΔ paralela al diámetro y las rectas AΔ, ZΘ son paralelas a la tangente en el punto B, es evidente que BΔ guarda con BΘ en longitud la misma razón que AΔ con ZΘ en cuadrado. Por tanto, BΔ es el cuádruple de BΘ en longitud.

Está claro por tanto que BΔ es en longitud cuatro tercios de EZ.

PROPOSICIÓN 20

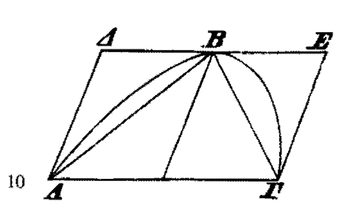
Si en un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo se inscribe un triángulo que tenga la misma

[25] «Paralela al diámetro», se entiende.

[26] «Desde el centro de la mitad de la base», se entiende.

base que el segmento y la misma altura, el triángulo inscrito será mayor que la mitad del segmento.

Sea ABΓ un segmento como se ha dicho e inscríbase en él el triángulo ABΓ que tenga la misma base que el segmento entero e igual altura.



Puesto que el triángulo tiene la misma base y la misma altura que el segmento, por fuerza el punto B será el vértice del segmento. Por tanto, la recta AΓ es paralela a la tangente a la sección en el punto B. Por el punto B trácese ΔE paralela a AΓ, y desde los puntos A, Γ trácense AΔ, ΓE paralelas al diámetro. Éstas caerán fuera del segmento.

Puesto que el triángulo ABΓ es la mitad del paralelogramo AΔEΓ, está claro que es mayor que la mitad del segmento.

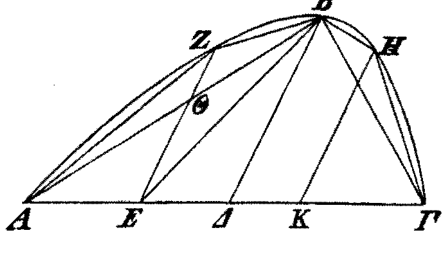
COROLARIO

Demostrado esto, es evidente que es posible inscribir en este segmento un polígono de tal manera que los segmentos que quedan en torno sean menores que cualquier área propuesta. Por ello está claro que, restada continuamente un área que sea mayor que la mitad, al disminuir continuamente los segmentos restantes, llegaremos a hacerlos menores que cualquier área propuesta.

306 PROPOSICIÓN 21

Si en un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo se inscribe un triángulo que tenga la misma base que el segmento y la misma altura, y en los segmentos restantes se inscriben otros triángulos que tengan la misma base que los segmentos y la misma altura, el triángulo inscrito en el segmento entero será el óctuplo de cada uno de los triángulos inscritos en los segmentos que quedan en torno.

Sea ABΓ un segmento como se ha dicho y córtese AΓ por la mitad por el punto Δ, y trácese BΔ paralela al diámetro; entonces el punto B es el vértice del segmento [Prop. 18]. Luego el triángulo ABΓ tiene la misma base que el segmento y la misma altura. Córtese de nuevo AΔ por la mitad por el punto E y trácese EZ paralela al diámetro, y córtese AB por el punto Θ. Entonces el punto Z es el vértice del segmento AZB. Y el triángulo AZB tiene la misma base que el segmento[27] y la misma altura.



Se ha de demostrar que el triángulo ABΓ es el óctuplo del triángulo AZB.

Así, BΔ es cuatro tercios de EZ [Prop. 19] y el doble de EΘ. Luego EΘ es el doble de ΘZ. De manera que también el triángulo AEB es el doble del ZBA, pues el triángulo AEΘ es el doble del AΘZ, y el ΘBE el doble del ZΘB. De modo que el triángulo ABΓ es el óctuplo de AZB.

De manera semejante se demostrará que también es ⟨el óc- 308
tuplo⟩ del ⟨triángulo⟩ inscrito en el segmento BHΓ.

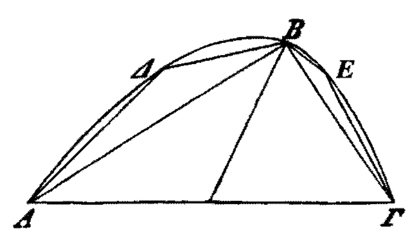
PROPOSICIÓN 22

Si hubiera un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo y se dispone un número cualquiera

[27] [*AZB*].

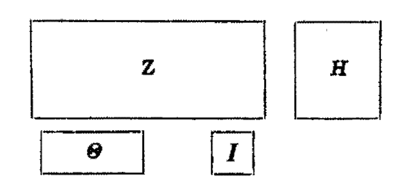
de áreas sucesivamente en la razón de cuatro a uno y la mayor de las áreas fuera igual al triángulo que tiene la misma base que el segmento y la misma altura, la suma de todas las áreas será menor que el segmento.

Sea AΔBEΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de un cono rectángulo, y sean Z, H, Θ, I un número cualquiera de áreas dispuestas sucesivamente y sea el cuádruple el antecedente del consecuente, y sea Z la mayor, y sea Z igual al triángulo que tiene la misma base que el segmento e igual altura.



Digo que el segmento es mayor que ⟨la suma de⟩ las áreas Z, H, Θ, I.

Sea el punto B el vértice del segmento entero y los puntos Δ, E los de los segmentos que quedan en torno. Puesto que el triángulo ABΓ es el óctuplo de cada uno de los triángulos AΔB,



BEΓ, está claro que es el cuádruple de la suma de ambos. Y puesto que el triángulo ABΓ es igual al área Z, según eso también ⟨la suma de⟩ los triángulos AΔB, BEΓ son iguales al área H. Del mismo modo se demostrará también que ⟨la suma de⟩ los triángulos inscritos en los segmentos que quedan en torno con la misma base que los segmentos y la misma altura son iguales al
310 área Θ, y que ⟨la suma de⟩ los triángulos inscritos en los segmentos resultantes posteriormente son iguales al área I.

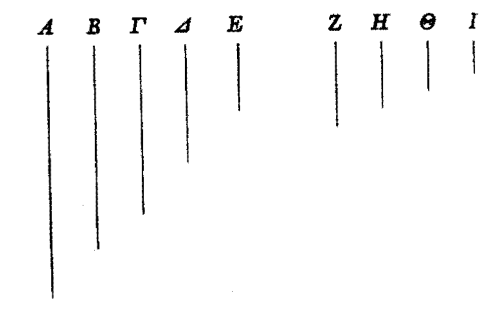
Luego la suma de todas las áreas propuestas anteriormente será igual a un polígono inscrito en el segmento.

Luego está claro que es menor que el segmento.

Proposición 23

Si se disponen sucesivamente magnitudes en la razón de cuatro a uno, todas las magnitudes más la tercera parte de la menor sumadas en una sola serán cuatro tercios de la mayor.

Sean pues A, B, Γ, Δ, E un número cualquiera de magnitudes dispuestas sucesivamente, cada una el cuádruple de la siguiente, y sea A la mayor, y sea Z la tercera parte de B; H la tercera parte de Γ; Θ la tercera parte de Δ; I la tercera parte de E.



Puesto que Z es la tercera parte de B y B la cuarta parte de A, la suma de B, Z es la tercera parte de A. Por la misma razón, ⟨la suma de⟩ H, Γ es la ⟨tercera parte⟩ de B y ⟨la suma de⟩ Θ, Δ ⟨la tercera parte⟩ de Γ y ⟨la suma de⟩ I, E la ⟨tercera parte⟩ de Δ. Y la suma de todas las magnitudes B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I es la tercera parte de la suma de A, B, Γ, Δ. Y ⟨la suma de⟩ las propias magnitudes Z, H, Θ es la tercera parte de las propias B, Γ, Δ. Luego también las restantes B, Γ, Δ, E, I son la tercera parte de la magnitud restante A.

Es evidente, por tanto, que la suma de todas las magnitudes A, B, Γ, Δ, E más I —es decir, la tercera parte de E— es cuatro tercios de A[28].

312 PROPOSICIÓN 24

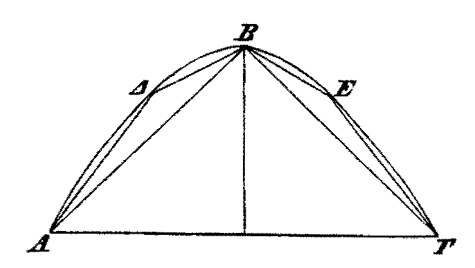
Todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base que él e igual altura.

Sea AΔBEΓ un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo, y sea ABΓ un triángulo que tiene la misma base que el segmento e igual altura, y sea el área K cuatro tercios del triángulo ABΓ.

Se ha de demostrar que es igual al segmento AΔBEΓ.

Pues si no es igual, es mayor o menor.

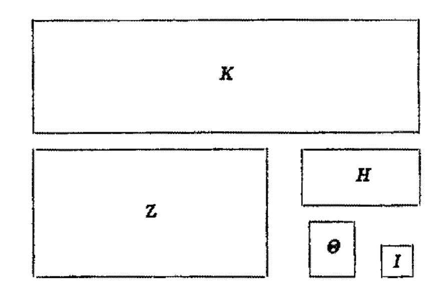
Sea primero mayor, si es posible, el segmento AΔBEΓ que el área K.



[28] Una demostración más general en EUCLIDES IX 35: «Si tantos números como se quiera están en proporción continua, y del segundo y del último se quitan números iguales al primero, el exceso del segundo al primero será como el exceso del último a (la suma de) todos los anteriores a él». Para la generalización de esta proposición puede verse STAMATIS, Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους, *Πλάτων* 15 (1963), fasc. 29-30, 165-168, y DIJKSTERHUIS, *op. cit.*, págs. 129-130.

He inscrito los triángulos AΔB, BEΓ, como se ha dicho, y he inscrito también en los segmentos que quedan en torno otros triángulos que tienen la misma base que los segmentos y la misma altura, y en los segmentos que van resultando sigo inscribiendo constantemente dos triángulos que tienen la misma base que los segmentos y la misma altura.

Los segmentos que van quedando serán menores que el exceso en que excede el segmento AΔBEΓ al área K. De manera que el polígono inscrito será mayor que K. Lo cual es imposible. Dado que hay unas áreas dispuestas sucesivamente en la 314
razón de cuatro a uno —en primer lugar, el triángulo ABΓ, cuádruple de los triángulos AΔB, BEΓ [Prop. 21]; después, éstos mismos son el cuádruple de los triángulos inscritos en los segmentos siguientes y así sucesivamente—, está claro que la suma de todas las áreas es menor que cuatro tercios de la mayor; y el área K es cuatro tercios del área mayor; por tanto el segmento AΔBEΓ no es mayor que el área K.



Sea, si es posible, menor.

Póngase el triángulo ABΓ igual al área Z; el área H, la cuarta parte de Z y, de manera semejante, el área Θ ⟨la cuarta parte⟩ de H y pónganse constantemente de modo sucesivo hasta que la última resulte menor que el exceso en que el área K excede al segmento, y sea I menor[29]. Así, ⟨la suma de⟩ las áreas Z, H, Θ, I

[29] Entiéndase: «menor que el exceso».

más la tercera parte de I es cuatro tercios de Z. Y el área K también es cuatro tercios de Z. Por tanto, el área K es igual a ⟨la suma de⟩ las áreas Z, H, Θ, I más la tercera parte de I. Puesto que el área K excede a la suma de las áreas Z, H, Θ, I en una magnitud menor que I y al segmento en una magnitud mayor que I, está claro que ⟨la suma de⟩ las áreas Z, H, Θ, I es mayor que el segmento. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que si había un número cualquiera de áreas dispuestas en la razón de cuatro a uno y la mayor era igual al triángulo inscrito en el segmento, la suma de todas las áreas sería menor que el segmento. Luego, el segmento AΔBEΓ no es menor que el área K.

Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego es igual al área K. Y el área K es cuatro tercios del triángulo ABΓ. Luego también el segmento AΔBEΓ es cuatro tercios del triángulo ABΓ.

SOBRE LOS CUERPOS FLOTANTES

INTRODUCCIÓN

El tratado *Sobre los cuerpos flotantes* es, junto con el *Equilibrio de las figuras planas*, una de las dos obras de tema físico debidas a Arquímedes. En él se contienen los más antiguos estudios científicos sobre hidrostática y la expresión del principio fundamental de dicha materia, el bien conocido «principio de Arquímedes» cuyo descubrimiento inmortalizó la anécdota sobre la corona de Hierón que Plutarco nos ha transmitido[1].

Su texto parecía haberse conservado sólo en la traducción latina de Guillermo de Moerbeke hasta que el descubrimiento del palimpsesto permitió a Heiberg recuperar buena parte del texto griego[2] y dio a conocer la demostración de la proposición 8 del Libro I, que faltaba en la versión latina. Más recientemente, el equipo dirigido por Netz ha podido leer pasajes del palimpsesto que Heiberg tuvo que dar por imposibles y, al parecer, han sido publicados en una edición no venal. Lamentablemente, no hemos podido consultarla, de modo que nuestra traducción refleja el texto, en parte griego, en parte latino, editado por Heiberg y recoge las ilustraciones publicadas por ese mismo estudioso.

El texto conserva el dialecto dorio de Arquímedes y se compone de dos libros. En el primero, un breve preámbulo recoge la

---

[1] *Cf.* vol. I, Introducción, págs. 9-10 y 15-16.

[2] *Cf.* vol. I, Introducción, págs. 54 y ss., especialmente págs. 60-63.

hipótesis —que usa como postulado— de que en los líquidos, la parte menos presionada es empujada por la más presionada, y que cada una de las partes es presionada verticalmente por el líquido que está por encima de ella[3]. A partir de esta hipótesis, las nueve proposiciones de que consta el Libro I avanzan como si fueran fruto del método deductivo —un poco al modo en que veíamos que se desarrollaba el tratado astronómico de Euclides sobre los *Fenómenos*[4]—, aunque en realidad los enunciados propuestos y demostrados proceden con toda probabilidad de observaciones sistemáticas repetidas —radicalmente diversas, no obstante, del método experimental, que no sería definido y utilizado en las investigaciones científicas hasta dos milenios más tarde.

Las proposiciones 1 y 2 conducen a la afirmación de que «la superficie de todo líquido en estado de inmovilidad tiene la figura de una esfera cuyo centro es el centro de la tierra»; en la proposición 3 se determinan las condiciones de estática de las magnitudes de igual peso específico[5] que el fluido en que se las sumerge; las proposiciones 4 y 5 estudian ciertas particularidades de la estática de las magnitudes de menor peso específico que el fluido, y en las proposiciones 6 y 7 se formula el «principio de Arquímedes» de modo separado para los casos de magnitudes de peso específico menor (prop. 6) y mayor (prop. 7) que el fluido en que se las sumerge. Por último, las proposiciones 8 y 9 se refieren a la posición de equilibrio de un casquete esférico de peso específico inferior al del fluido, de acuerdo con el principio, expresado al principio de la obra, de que el empuje del fluido sobre el sólido se ejerce sobre el centro de gravedad del mismo y siguiendo la vertical.

[3] Sobre las dificultades suscitadas por este postulado puede verse el comentario de Dijksterhuis, *op. cit.*, págs. 377-379.

[4] Ver BCG 277, págs. 241-324.

[5] Noción descubierta por Arquímedes, según testimonia la anécdota de la corona de Hierón, pero a la que el siracusano no llegó a dar un nombre con categoría terminológica.

El Libro II se abre con la demostración de que el sólido de menor densidad que el líquido en que es depositado guarda en peso con el líquido desalojado la misma razón que guarda la parte sumergida del sólido con el sólido entero. Las otras nueve proposiciones que componen esta parte del tratado se ocupan en exclusiva del estudio de la estática del segmento recto de paraboloide de revolución: las proposiciones 2 y 3 estudian los casos en que el eje del segmento de paraboloide no es mayor que una vez y media el parámetro; las proposiciones 4 y 5, cuando el eje es mayor que una vez y media el parámetro; las proposiciones 6 a 9, diversas situaciones cuando el eje es mayor que una vez y media el parámetro pero menor que 15/4 del mismo y, por último, la proposición 10 determina las distintas posiciones en que queda flotando el segmento de paraboloide cuando el eje del mismo es mayor que 15/4 del parámetro.

A pesar de que la lectura del tratado se hace especialmente costosa —en parte, en razón de la falta absoluta de terminología en este campo del conocimiento, que fuerza al autor a emplear constantemente largas perífrasis— hay que reconocer en esta obra la muestra más elevada de la genialidad de Arquímedes. No obstante lo significativo de sus descubrimientos, los hallazgos dados a conocer en este tratado quedaron prácticamente en el olvido hasta el Renacimiento, cuando, a mediados del siglo XVI, la imprenta puso a disposición de los estudiosos la traducción latina de Moerbeke, dando pie a nuevas investigaciones en esta materia —como el descubrimiento de la paradoja hidrostática (Stevin, 1586) o los trabajos de Pascal, ya en el siglo XVII.

Aun cuando fueron ignorados durante casi dos milenios, los libros *Sobre los cuerpos flotantes* han sido valorados en términos laudatorios por los mejores especialistas. Así Dijksterhuis pondera que «ésta es la parte del trabajo de Arquímedes que suscita la más elevada admiración del matemático de hoy, tanto por la elevada calidad de los resultados obtenidos, que parecen estar mucho más allá de la palidez de los de la matemática clá-

sica, como por la genialidad del argumento» y Ver Eecke subraya el interés de la obra desde el punto de vista de la ingeniería al afirmar que de estas proposiciones se desprende la teoría del metacentro, que permitiría a la construcción naval superar el estadio del mero empirismo.

LIBRO I

Supóngase que el líquido tiene una naturaleza tal que de las II 31
partes suyas que yacen por igual y son continuas, la menos presionada es empujada por la más presionada, y que cada una de sus partes es presionada verticalmente por el líquido que está por encima de ella a menos que el líquido esté encerrado en un recipiente y sea presionado por alguna otra cosa.

Proposición 1

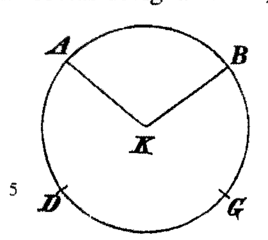
Si hay una superficie cortada mediante un plano que, pasando siempre por el mismo punto, produce como sección[1] *un arco de círculo cuyo centro es el punto por el que es cortada mediante el plano, la superficie será una esfera.*

Sea pues una superficie cortada mediante un plano que, pasando por el punto K, produce siempre como sección un arco de círculo, y sea K el centro de éste.

Si esta superficie no es una superficie de esfera, las líneas que van del centro a la superficie no serán todas iguales.

[1] A partir de aquí y hasta el final de la proposición 1, así como buena parte de la proposición 2 (es decir, el pasaje que va de 318, 12 hasta 320, 15) se nos ha conservado como fuente única el texto latino de la versión de Guillermo de Moerbeke.

Así, sean en la superficie unos puntos A, B, G, D y unas 319 rectas desiguales AK, KB y por las mismas KA, KB trácese un plano y produzca como sección en la superficie la línea DABG; ésta es un círculo y su centro el punto K, dado que así se había supuesto la superficie. Luego las rectas KA, KB no son desiguales.



Luego por fuerza la superficie es superficie de una esfera.

Proposición 2

La superficie de todo líquido en estado de inmovilidad tendrá la figura de una esfera que tendrá por centro el mismo que la tierra.

Supóngase un líquido en estado de inmovilidad[2] y córtese su superficie mediante un plano que pase por el centro de la tierra, y sea K el centro de la tierra y la sección de su superficie la línea ABGD.

Digo que la línea ABGD es un arco de círculo y K su centro.

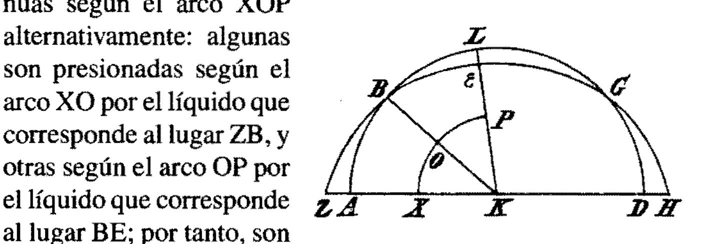
Pues si no es así, las rectas trazadas desde K que inciden en la línea ABGD no serán iguales.

Tómese pues una recta que sea mayor que unas y menor que otras de las que desde K inciden en la línea ABGD, y con centro en K y por radio la línea tomada trácese un círculo. Entonces la circunferencia del círculo caerá en parte por fuera de la línea ABGD y en parte por dentro, puesto que el radio es 320 mayor que unas y menor que otras de las que inciden hasta la línea ABGD. Sea pues ZBH la circunferencia del círculo descrito, y desde B trácese una recta hasta K, y trácense ZK, KEL

[2] Lat. *consistens ita, ut maneat inmotus*; gr. (según se desprende de la parte de la proposición conservada en griego), *kathestakòs hôste akínēton ménein.*

que formen ángulos iguales[3], y también con centro K trácese un arco XOP en el plano y en el líquido.

Así, ciertas partes del líquido yacen por igual y son continuas según el arco XOP alternativamente: algunas son presionadas según el arco XO por el líquido que corresponde al lugar ZB, y otras según el arco OP por el líquido que corresponde al lugar BE; por tanto, son presionadas de modo desigual las partes del líquido correspondientes al arco XO[4] y las correspondientes al OΠ. De modo que las menos presionadas serán empujadas por las más presionadas. De modo que el líquido no está en reposo. Pero se había supuesto que estaba dispuesto de modo que permanecía inmóvil. Por tanto es de necesidad que la línea ABΓΔ sea un arco de círculo y que K sea su centro.



Del mismo modo se demostrará también que, si la superficie del líquido es cortada de otra manera mediante un plano que pase por el centro de la tierra, la sección será un arco de círculo y su centro será el ⟨punto⟩ que también es centro de la tierra.

Por tanto, es evidente que la superficie de un líquido en estado de inmovilidad tiene la figura de una esfera con el mismo centro que la tierra, puesto que es de tales características que ⟨cortada por el mismo punto⟩ produce como sección una circunferencia de un círculo que tiene por centro el punto por el que pasa el plano mediante el cual es cortada [Prop. 1].

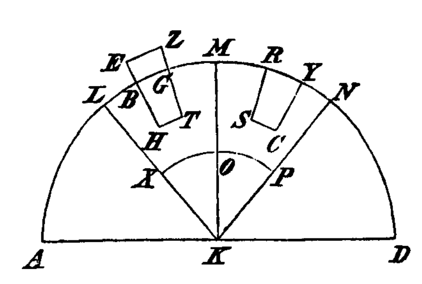
[3] «Con BK», se entiende.

[4] A partir de este punto volvemos a contar con texto griego.

Proposición 3

De las magnitudes sólidas, las que tienen el mismo peso que el líquido, depositadas en el líquido, se sumergirán de modo
322 *que no sobresalgan en absoluto de la superficie del líquido y ya no serán llevadas más hacia abajo*[5].

Deposítese en un líquido una magnitud sólida de las que tienen el mismo peso que el líquido y, si es posible, sobresalga algo de ella por encima de la superficie del líquido, y esté el líquido en tal situación que permanezca inmóvil. Considérese un plano trazado pasando por el centro de la tierra y por el líquido y por la magnitud sólida, y sea el arco ΑΒΓΔ la sección de la superficie del líquido y la figura ΕΖΗΘ la de la magnitud sólida, y sea K el centro de la tierra. Y del sólido esté la parte ΒΓΗΘ en el líquido, y la parte ΒΕΖΓ, fuera.



Considérese la figura sólida comprendida por una figura semejante a una pirámide que tenga por base el paralelogramo que está en la superficie del líquido y por vértice el centro de la tierra, ⟨y sea⟩ donde figura el arco ΑΒΓΔ ⟨la sección del pla⟩no y las rectas ΚΛ, ΚΜ las de las caras de la pirámide. Con centro en K descríbase la superficie de otra esfera en el líquido que está por debajo del sólido ΕΖΗΘ y córtese mediante un plano, y tómese también otra pirámide igual y semejante a la que comprende el sólido y contigua a ella, y sean las rectas ΚΜ, ΚΝ la sección de sus caras, y en el líquido considérese tomada del líquido una magnitud ΡΣΤΥ, igual y semejante a la parte del sólido correspondiente a
Β, Η, Θ, Γ que está en el líquido. 324

Las partes del líquido que están en la primera pirámide por debajo de la superficie en donde figura el arco ΞΟ y las que están en la otra, en donde figura ΠΟ, yacen por igual y son continuas. Pero no reciben la misma presión, pues la correspondiente a ΞΟ recibe la presión del sólido ΘΗΕΖ y la del líquido que está entre las superficies correspondientes a ΞΟ, ΛΜ y a las caras de la pirámide, mientras que la correspondiente a ΠΟ, la del líquido que está entre las superficies correspondientes a ΠΟ, ΜΝ y a las caras de la pirámide. Y el peso del líquido correspondiente a ΜΝ, ΟΠ será menor, pues, por una parte, el correspondiente a ΡΣΤΥ es menor que el sólido ΕΖΗΘ —pues es igual al correspondiente a ΗΒΓΘ por haber supuesto que el sólido es igual en magnitud y del mismo peso ⟨que el líquido⟩— y, por otra parte, ⟨lo restante es igual a lo restante⟩. Por tanto, es evidente que la parte correspondiente al arco ΟΠ será empujada por la correspondiente al arco ΟΞ, y el líquido no estará inmóvil. Pero se ha supuesto que estaba inmóvil.

Luego no sobresaldrá de la superficie del líquido nada de la magnitud sólida. Y el sólido, una vez sumergido, no será llevado hacia abajo, pues todas las partes del líquido que yacen por igual recibirán la misma presión por ser del mismo peso el sólido y el líquido.

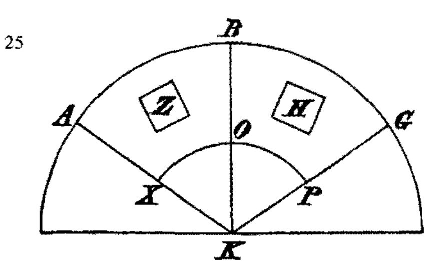
Proposición 4

De las magnitudes sólidas, la que es más liviana que el lí-
quido, depositada en el líquido, no se sumergirá entera, sino 326
que una parte de ella quedará por fuera de la superficie del líquido.

[5] Heiberg recoge como *locus similis* el siguiente pasaje de Herón *(Pneumatica* I, pág. 24, 11): «Arquímedes demostró en los *Cuerpos flotantes* que los cuerpos del mismo peso que el líquido ni sobresaldrán del líquido ni se sumergirán, ni tampoco, por tanto, ejercerán presión sobre lo que está debajo».

Sea una magnitud sólida más liviana que el líquido y, una vez depositada en el líquido, quede sumergida entera, si es posible, y no quede nada de ella por fuera de la superficie del líquido y esté el líquido en estado tal que permanezca inmóvil.

Considérese un plano trazado pasando por el centro de la tierra y por el líquido y por la magnitud sólida y corte este plano a la superficie del líquido según el arco ΑΒΓ y a la magnitud sólida según la figura donde está Z, y sea K el centro de la tierra; considérese una pirámide que comprenda a la figura Z, como la de antes [Prop. 3], que tenga por vértice el punto K y corte a sus caras el plano ΑΒΓ según las rectas AK, KB y tómese otra pirámide igual y semejante a ésta, y corte el plano las caras de ésta según las rectas KB, KΓ, y trácese en el líquido la superficie de otra esfera, con centro en K, por debajo de la magnitud sólida, y córtela[6] el mismo plano según el arco ΞΟΠ, y considérese también una magnitud —la de H— tomada del líquido, comprendida en la segunda pirámide, igual al sólido Z.



Las partes del líquido de la primera pirámide por debajo de la superficie correspondiente al arco ΞΟ y las del líquido de la segunda por debajo de la superficie correspondiente al arco ΟΠ yacen por igual y 328 son continuas una con otra. Pero no reciben igual presión, pues el de la primera pirámide recibe la presión de la magnitud sólida Z y la del líquido que lo rodea y que está en el espacio de la pirámide señalado por A, B, O, Ξ, mientras que el de la otra pirámide recibe la presión del líquido que lo rodea y que está en el espacio de la pirámide señalado por Π, O, B, Γ; por otro lado, el peso correspondiente a ⟨Z es menor que el peso correspondiente a⟩ H, dado que es igual a ésta en magnitud, pero que se ha supuesto que la magnitud sólida era más liviana que el líquido, y que los pesos del líquido que rodea las magnitudes Z, H en cada una de las pirámides son iguales. Por tanto, recibirá mayor presión la parte del líquido que queda bajo la superficie correspondiente al arco ΟΠ; por tanto, el que recibe menor presión será empujado y el líquido no permanecerá inmóvil; pero se había supuesto que sí.

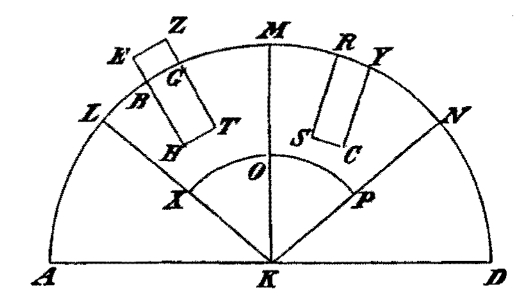
[6] Debe cortar «la superficie de esta segunda esfera», se entiende.

Luego no se sumergirá entero, sino que habrá una parte de él que quede fuera de la superficie del líquido.

Proposición 5

De las magnitudes sólidas, la que sea más liviana que el líquido, depositada en el líquido, se sumergirá en la medida en que un volumen del líquido igual al volumen de la parte sumergida tenga un peso igual al de la magnitud entera.

Constrúyase lo mismo que en las proposiciones anteriores y esté inmóvil el líquido, y sea la magnitud ΕΖΗΘ más liviana que el líquido.



Puesto que el líquido está inmóvil, las partes de él que yacen por igual estarán recibiendo la misma presión. Por tanto, el líquido que está por debajo de la superficie correspondiente al

330 arco ΞΟ y al ΠΟ estará recibiendo la misma presión. De modo que el peso por el que están presionados es igual. Y también el peso del líquido que hay en la primera pirámide menos el del sólido ΒΗΘΓ es igual al peso ⟨del líquido de la otra pirámide⟩ menos el del líquido ΡΣΤϒ. Es evidente por tanto que el peso de la magnitud ΕΖΗΘ es igual al peso del líquido ΡΣΤϒ.

Está claro por tanto que un volumen de líquido tan grande como el de la parte sumergida de la magnitud sólida tiene el mismo peso que la magnitud entera.

Proposición 6

Los sólidos más livianos que el líquido, forzados dentro del líquido, son desplazados hacia arriba con una fuerza tan grande como el peso en que es más pesado que la magnitud el líquido que tiene igual volumen que la magnitud.

Sea A una magnitud más liviana que el líquido y sea B el peso de la magnitud en la que figura A, y sea ΒΓ el del líquido[7] que tiene igual volumen que A.

Se ha de demostrar que la magnitud A forzada dentro del líquido será desplazada hacia arriba con tanta fuerza como tenga el peso Γ.

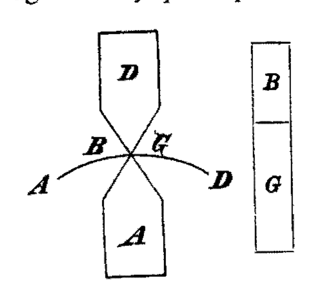
Tómese una magnitud, en la que figura Δ, que tenga un peso igual a Γ. La magnitud compuesta de las dos magnitudes en las que figuran A, Δ es más liviana que el líquido, pues ΒΓ es el peso de la magnitud compuesta de ambas, mientras que el peso
332 del líquido que tiene el mismo volumen que ésta[8] es mayor que ΒΓ, por ser ΒΓ el peso de la magnitud que tiene el mismo volumen que A. Depositada en el líquido la magnitud compuesta de las dos magnitudes A, Δ se sumergirá en una medida tal que ⟨un

[7] «El peso del líquido», se entiende.

[8] Es decir, «que ΒΓ».

volumen de líquido⟩ como el de la parte sumergida de la magnitud tenga igual peso que la magnitud entera —pues esto se ha demostrado [Prop. 5]—. Sea el arco ΑΒΓΔ la superficie de un líquido.

Puesto que un volumen del líquido tan grande como la magnitud A tiene igual peso que las magnitudes A, Δ, está claro que la parte sumergida de éste será la magnitud A y que la parte restante de éste, en la que figura Δ, estará entera por encima de la superficie del líquido. Pues si el sólido queda sumergido[9] †...† se sigue †...† demostrado esto. Está claro, por tanto, que la magnitud A es desplazada hacia arriba †...† desde arriba Δ hacia abajo, puesto que ninguna de las dos magnitudes era desplazada por la otra. Pero Δ ejerce presión hacia abajo con tanto peso como Γ. Pues se había supuesto que el peso de la figura en la que está Δ era igual a Γ.



Luego es evidente lo que había que demostrar.

Proposición 7

Las magnitudes más pesadas que el líquido, depositadas en el líquido, se desplazarán hacia abajo hasta llegar al fondo, y en el líquido serán más livianas en un peso igual al del líquido 33[1] *de volumen igual al volumen de la magnitud sólida.*

[9] Heiberg, sin ofrecer una conjetura que colme las pequeñas lagunas, restituye en su versión latina el sentido siguiente: «Pues si el sólido se sumerge de otra manera, se sigue una contradicción con lo demostrado anteriormente. Está claro por tanto que la magnitud A es desplazada hacia arriba con una fuerza tan grande como la presión que ejerce desde arriba Δ hacia abajo, puesto que ninguna de las dos magnitudes...».

Que se desplazarán hacia abajo hasta llegar al fondo, es evidente, pues las partes del líquido por debajo de ésta[10] experimentarán mayor presión que las partes que yacen por igual que ellas, dado que se ha supuesto que la magnitud sólida es más pesada que el líquido.

Que serán más livianas como se ha dicho, se demostrará.

Sea A una magnitud que es más pesada que el líquido, y sea BΓ el peso de la magnitud en la que figura A, y B el del líquido de igual volumen que A.

Se ha de demostrar que la magnitud A, estando en el líquido, tendrá un peso igual a Γ.

Tómese una magnitud, en la que figura Δ, ⟨más liviana que el líquido de volumen igual a ella, y sea⟩ igual al peso B el peso de la magnitud en la que figura Δ, y sea el peso del líquido de volumen igual a la magnitud Δ igual al peso BΓ.

Sumadas en una sola las magnitudes en las que figuran A, Δ, la magnitud suma de ambas será del mismo peso que el líquido, pues el peso de las magnitudes sumadas es igual a los pesos BΓ y B sumados, mientras que el peso del líquido de volumen igual a la suma de las dos magnitudes es igual a esos mismos pesos.

Así pues, una vez depositadas las magnitudes en el líquido,
336 pesarán lo mismo que el líquido y no se desplazarán hacia arriba ni hacia abajo [Prop. 3]. Por lo cual la magnitud en la que figura A será desplaza⟨da hacia abajo y, con la misma fuerza⟩, la magnitud en la que figura Δ tira de ella hacia arriba, mientras que la magnitud en la que figura Δ, puesto que es más liviana que el líquido, será desplazada hacia arriba con la misma fuerza que tiene el peso Γ —pues se ha demostrado que las magnitudes sólidas más livianas que el líquido metidas por la fuerza dentro del líquido son llevadas hacia arriba con una fuerza igual al peso

[10] «De la magnitud en cuestión», se entiende.

en que el líquido de igual volumen que la magnitud es más pesado que la magnitud [Prop. 6]. Y el líquido del mismo volumen que Δ es más pesado que la magnitud Δ en el peso Γ.

Así, es evidente también que la magnitud en la que figura A será desplaza⟨da hacia abajo con un peso igual al de Γ⟩.

* * *

Supóngase que cada una de las magnitudes desplazadas ⟨hacia arriba, de las que están en un líquido⟩, son llevadas hacia arriba según la vertical trazada pasando por su centro de gravedad.

Proposición 8

Si una magnitud sólida, más liviana que el líquido, con figura de casquete esférico, es depositada en un líquido de tal manera que la base del casquete no esté en contacto con el líquido, la figura se mantendrá derecha de tal modo que el eje del casquete esté vertical; y si la figura fuese arrastrada por alguna fuerza de modo que la base del casquete entre en contacto con el líquido, no permanecerá inclinada si se deja libre, sino que volverá a ponerse derecha.

Considérese una magnitud como la que se ha dicho deposita⟨da⟩ en el líquido, y considérese un plano trazado ⟨por el eje 338
del⟩ casquete y el centro de la tierra, y sea la sección de la superficie del líquido el arco ΑΒΓΔ, y la de la figura depositada en el líquido, el arco ΕΖΗΘ, y sea ΘΖ el eje del casquete; el centro de la esfera está, naturalmente, en la recta ΘΖ.

En primer lugar, si el casquete es mayor que un hemisferio, sea K y esté la figura inclinada si es posible, ya sea inclinada por alguna cosa, ya por sí misma.

Se ha de demostrar que no permanecerá quieta, sino que

volverá a ponerse derecha de modo que los puntos Z, Θ estén en vertical.

Dado que se ha supuesto que la figura está inclinada, los puntos Z, Θ no están en vertical. Por los puntos K y Λ trácese la recta KΛ, y supóngase que el punto Λ es el centro de la tierra. La figura tomada del líquido comprendida por la superficie del líquido tiene su eje en la recta KΛ —pues si las superficies de dos esferas se cortan entre sí, la sección es un círculo perpendicular a la recta que une los centros de las esferas[11]—. Así, el centro de gravedad de la figura tomada del líquido correspondiente al arco BNΓ está en la recta KΛ: sea P. Y el centro de gravedad del casquete entero, el correspondiente al arco ΘHZE, está en la recta ZΘ: sea Ξ. Por tanto, el centro de gravedad del ⟨resto de la figura, que está por fuera⟩ de la super-
340 ficie del líquido, está en la prolongación de la recta PΞ, tomando de ella una recta, ΣΞ, que guarde con la recta ΞP la misma razón que guarda el peso del casquete correspondiente al arco BNΓ con el peso de la parte que está fuera del líquido —pues esto se ha demostrado [*Equil. Plan.* I 8]—. Sea Σ el centro de la figura indicada. Puesto que el peso de la figura que queda fuera del líquido es desplazado hacia abajo según la recta ΛΣ, mientras que la parte que está en el líquido es desplazada hacia arriba según lá recta PK [Prop. 7, 336, 14 y ss.], es evidente que la figura no permanecerá quieta, sino que las partes de la misma que están hacia E serán desplazadas hacia abajo mientras que las que están hacia H, hacia arriba, y serán desplazadas siempre en la misma dirección hasta que ZΘ esté vertical. Y una vez

[11] Aunque esto puede deducirse en aplicación de ciertos contenidos de los *Elementos* de Euclides, la literatura matemática griega no nos ha conservado ninguna demostración directa de ello.

que ZΘ esté vertical, los centros de gravedad de la parte que está en el líquido y de la que está fuera estarán en la misma vertical, pues estarán en la recta ZΘ. Así, los pesos se presionarán el uno al otro en sentidos opuestos según la misma vertical, impulsado el uno hacia abajo y el otro hacia arriba. De modo que la figura permanecerá quieta, pues ninguna de las dos partes será empujada por la otra.

Lo mismo sucederá también si la figura fuera un hemisferio o menor que un hemisferio.

Proposición 9

Y también si fuera depositada en el líquido una figura que fuera más liviana que el líquido de manera que su base entera esté en el líquido, la figura se mantendrá derecha de modo que su eje esté en vertical.

Considérese una magnitud como la que se ha dicho deposi- 34
tada en el líquido y considérese también un plano trazado pasando por el eje del casquete y por el centro de la tierra, y sea el arco ΑΒΓΔ la sección de la superficie del líquido; el arco EZH y la recta EH, la sección de la figura, y sea ZΘ el eje del casquete.

Si es posible, no esté ZΘ en vertical.

Se ha de demostrar que la figura no permanecerá quieta, sino que volverá a estar derecha.

El centro de la esfera está en la recta ZΘ (de nuevo, sea primero la figura mayor que un hemisferio), y sea el punto K. Trácese la recta KΛ por el punto K y por el punto Λ, centro de la tierra.

La figura comprendida por la superficie del líquido exterior

al líquido, tiene su eje en la recta que pasa por K y, por la misma razón que en lo anterior [Prop. 8], su centro de gravedad está en la recta NK: sea P. Y el cen⟨tro de gravedad⟩ del casquete entero ⟨está en la recta ZΘ⟩ entre los puntos K, Z: sea T. Luego el centro de la figura restante, la que está en el líquido, estará en la recta TP, una vez prolongada y tomada de ella una recta que guardará con TP la misma razón que la que guarda el peso del segmento exterior al líquido con el peso de la figura que está en el líquido. Y sea O el centro de la figura indicada[12], y sea OΛ
344 una vertical que pase por O. El peso del casquete que está fuera del agua será desplazado hacia abajo según la recta PΛ, mientras que el de la figura que está en el agua será desplazado hacia arriba según la recta OΛ [prop. 7, 336, 14 y ss.].

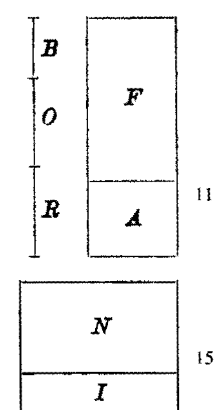
Por tanto la figura no permanecerá quieta, sino que las partes de la figura del lado de H serán desplazadas hacia abajo mientras que las del lado de E hacia arriba y eso ocurrirá constantemente hasta que ΘZ esté en vertical.

[12] Es decir, «de la parte de la figura sumergida en el líquido».

LIBRO II

Proposición 1

Si una magnitud que es más liviana que el agua es depositada en el líquido guardará en peso con el líquido la misma razón que guarda la parte sumergida de la magnitud con la magnitud entera.



Deposítese en el líquido una magnitud sólida, ΦA, que sea más liviana que el líquido, y sea A la parte sumergida de la misma, y Φ la de fuera del líquido.

Se ha de demostrar que ΦA guarda en peso con el líquido de igual volumen la misma razón que guarda A con ΦA.

Tómese una magnitud de líquido, NI, de volumen igual a ΦA, y sea N igual a Φ e I igual a A y, además, sea B el peso de la magnitud ΦA y PO el de NI y P el de I.

Por tanto, ΦA guarda con NI la misma razón que B con PO. Pero puesto que la magnitud ΦA, que era más liviana que el líquido, había sido depositada en el líquido, es evidente que el volumen de la magnitud sumergida tiene igual peso que la magnitud ΦA —pues eso se ha demostrado [*C. flot.* I 5]—. Luego el peso B es igual al P, 34

puesto que el peso B es el de la magnitud ΦA entera, mientras que P es el peso del líquido I, el cual era igual a la magnitud que tenía el mismo volumen que la magnitud sumergida A. Por tanto, la magnitud ΦA es en peso a la NI como el peso P al PO. Y la razón que guarda P con PO es la misma razón que guardan I con IN y A con ΦA.

Luego se ha demostrado lo propuesto.

Proposición 2

El segmento recto de un paraboloide, cuando tiene un eje que no es mayor que una vez y media el parámetro[1], *cualquiera que sea la razón que guarde en peso con el líquido, depositado en el líquido de manera que su base no esté en contacto con el líquido, si se pone inclinado no permanecerá inclinado, sino que volverá a ponerse derecho (y digo que tal segmento está derecho siempre que el plano que lo ha cortado sea paralelo a la superficie del líquido)*[2].

Sea un segmento de paraboloide como el que se ha indicado y esté inclinado.

Se ha de demostrar que no permanecerá así, sino que volverá a ponerse derecho.

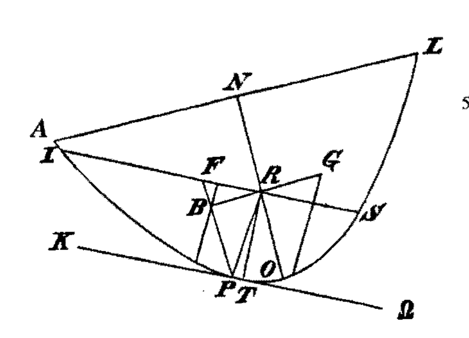
Cortado éste mediante un plano que pase por el eje y perpendicular al ⟨plano que está sobre la superficie⟩ del líquido,
350 sea la parábola ΑΠΟΛ la sección del segmento, y sea NO el eje

[1] Gr. *tâs méchri toû áxonos* —literalmente «la que va hasta el eje»—, es decir, la recta que va, siguiendo una generatriz, de la cúspide de la parábola a incidir en el eje del cono, o sea, hasta la cúspide del mismo. Siguiendo a Ver Eecke y Mugler y en aras de una mayor claridad hemos optado por reemplazar la perífrasis antigua por el término actual.

[2] Lo que Arquímedes propone, llamando P_s al peso del segmento, P_l al peso del líquido, E al eje y p al parámetro, es el estudio del caso en que $E < 3/2\ p$; aunque Arquímedes no lo explicita en esta proposición ni en la siguiente, hay que incluir la condición de que $P_s : P_l < 1$.

del segmento y diámetro de la parábola, y sea ΙΣ la sección de la superficie del líquido.

Puesto que el segmento no está derecho, la recta ΑΛ no sería paralela a la recta ΙΣ. De modo que NO no formará un ángulo recto con ΙΣ. Trácese pues paralela[3] la recta ΚΩ, tangente a la parábola en el punto Π y desde el punto Π trácese ΠΦ paralela a NO. La recta ΠΦ corta por la mitad a ΙΣ —pues eso se ha demostrado en las *Cónicas* [*Cuadr. parab.* 1]—.



Córtese ΠΦ de modo que ΠΒ sea el doble de ΒΦ, y córtese NO por el punto P de modo que también OP sea el doble de PN. El punto P será el centro de gravedad del segmento mayor del sólido, y el punto B el del correspondiente a ΙΠΟΣ —pues se ha demostrado en los *Equilibrios* que el centro de gravedad de todo segmento de paraboloide se encuentra en su eje, cortado de tal manera que el segmento del eje que está hacia el vértice sea el doble que el segmento restante[4]—. Una vez restado el segmento sólido correspondiente a ΙΠΟΣ del segmento entero, el centro de gravedad estará en la recta ΒΓ —pues eso se ha demostrado en los *Elementos de mecá⟨nica*[5], que si se resta una magnitud que no⟩ tiene el mismo centro de gravedad que la magnitud entera, el centro de gravedad de la magnitud

[3] «Paralela a ΙΣ», se entiende.

[4] La versión que ha llegado hasta nosotros del *Equilibrio de las figuras planas* no llega a estudiar los casos de los sólidos de revolución construidos a partir de las secciones cónicas; tampoco en *Conoides y esferoides* encontramos proposición alguna que pueda ser de aplicación al aserto, pero el caso sí se estudia mediante el método mecánico en *Método* 5.

[5] *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 24.

restante estará sobre la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y la magnitud restada prolongada hacia el lado en que se encuentra el centro de gravedad de la magnitud entera[6]—. Prolónguese BP hacia Γ, y sea Γ el centro de gravedad de la magnitud restante. Puesto que NO es una vez y media OP pero no es mayor que una vez y media el parámetro, es
352 evidente que PO no es mayor que el parámetro. Por tanto, ΠP forma con KΩ ángulos desiguales, y el ángulo PΠΩ es agudo. Por tanto, la perpendicular trazada desde P hasta ΠΩ caerá entre Π, Ω. Caiga como PΘ. Por tanto, PΘ es perpendicular al plano †paralelo†[7] en el que está ΣI, que está sobre la superficie del líquido. Desde B, Γ trácense unas rectas paralelas a PΘ. La parte de la magnitud que está fuera del líquido será desplazada hacia abajo según la vertical trazada pasando por Γ —pues se ha supuesto que cada uno de los pesos es llevado hacia abajo según la vertical que pasa por su centro[8]—, mientras que la magnitud que está en el líquido, puesto que es más liviana que el líquido, será desplazada hacia arriba según la vertical trazada pasando por B. Puesto que reciben empujes opuestos pero no según la misma vertical, ⟨la figura no permanecerá quieta, sino que la parte que está hacia⟩ A será llevada hacia arriba, mientras que la que está hacia Λ hacia abajo, y eso será así siempre hasta que vuelva a ponerse derecha.

[6] Más detalladamente, en *Equilibrio de las figuras planas* I 8 se demuestra que «Si de una magnitud se quita una magnitud que no tenga el mismo centro que la magnitud entera, una vez prolongada la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y de la restada hacia el lado en que está el centro de la magnitud entera, y tomada una parte de la prolongación de la recta que une los centros indicados de modo que ⟨esa parte⟩ guarde con la recta que está entre los centros la misma razón que la que guarda el peso de la magnitud quitada con el peso de la restante, el centro de gravedad de la magnitud restante será el extremo de la recta tomada».

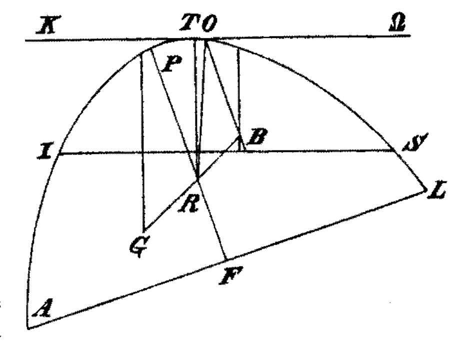
[7] Colmamos la laguna del texto siguiendo la versión latina de Heiberg.

[8] En el postulado que sigue a *Cuerpos flotantes* I 7.

Proposición 3

Un segmento recto de un paraboloide, cuando su eje no sea mayor que una vez y media el parámetro, cualquiera que sea la razón que guarde en peso con el líquido, depositado en el líquido de manera que su base entera esté en el líquido, si se pone inclinado, no se mantendrá inclinado, sino que volverá a una posición tal que su eje esté vertical[9].

Deposítese un segmento como el que se ha dicho en el líqui- 354
do y esté su base en el líquido y, cortado mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido, sea su sección la parábola AΠOΛ, y sea ΠΦ el eje del segmento y diámetro de la parábola, y sea IΣ la sección de la superficie del líquido.



Puesto que el segmento está inclinado, el eje no estará vertical. Por tanto, ΠΦ no formará ángulos iguales con IΣ. Trácese una ⟨recta KΩ paralela a IΣ y tangente en⟩ el punto O a la parábola AΠOΛ, y sea P el centro de gravedad del sólido AΠOΛ y B el del sólido IΠOΣ y, una vez trazada BP, prolónguese y sea Γ el centro de gravedad del sólido IΣΛA.

De la misma manera[10] se demostrará que el ángulo comprendido por PO, OK es agudo y que la perpendicular trazada desde P hasta KΩ caerá entre los puntos K, O; sea PΘ. Si desde los

[9] Es decir, el mismo caso que en la proposición anterior pero para otra posición del segmento recto de paraboloide.

[10] «De la misma manera que en la proposición anterior», se entiende.

puntos Γ, B se trazan unas paralelas a PΘ, la parte que queda comprendida en el líquido será desplazada hacia arriba según la recta trazada pasando por Γ, mientras que la de fuera del líquido hacia abajo según la recta trazada pasando por B, y el sólido ΑΠΟΛ no permanecerá así en el líquido, sino que la parte que está hacia A tendrá un desplazamiento hacia arriba, mientras que la que está hacia Λ, hacia abajo, hasta que la recta ΠΦ esté vertical.

Proposición 4

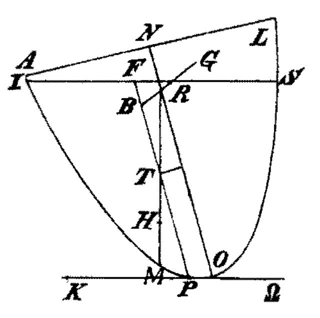
El segmento recto de paraboloide, siempre que sea más li-
356 *viano que el líquido y tenga su eje mayor que una vez y media el parámetro, cuando guarde en peso con el líquido de igual volumen una razón no menor que la que guarda el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, depositado en el líquido de modo que su base no esté en contacto con el líquido, si se pone inclinado no permanecerá inclinado, sino que volverá a ponerse derecho*[11].

Sea un segmento de paraboloide como el que se ha dicho y, una vez depositado en el líquido, si es posible, no esté derecho, sino inclinado, y una vez cortado mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido[12], sea la sección del segmento la parábola APOL [*Con. esf.* 11 a], y la recta NO el eje del segmento y diámetro ⟨de la parábola⟩ y sea IS la sección de la superficie del líquido. Así, si el segmento no está recto, la recta NO no formará con IS ángulos iguales. Trácese una recta KΩ tangente a la parábola en el punto P y

[11] El caso estudiado es el de que $E > 3/2\,p$, si $P_s : P_l \geq [E - (3/2\,p)]^2 : E^2$.

[12] El largo pasaje que va de 356, 14 hasta 363, 21 (la mayor parte de esta prop. 4 y las 5 y 6 completas) tiene como fuente el texto latino de la versión de Guillermo de Moerbeke.

paralela a IS, y desde P, igualmente paralela a ON, trácese PF, y tómense los centros de gravedad; y R será el centro del sólido APOL y B será el centro de la parte de éste que está dentro del líquido; y trácese una recta uniendo los puntos BR y prolónguese hasta G, y sea G el centro de gravedad del sólido que está por encima del líquido [*Equil. plan.* I 8].



Y dado que NO es una vez y media RO[13] y, por otra parte, mayor que una vez y media el parámetro, está claro que RO es mayor que el parámetro. Sea RM igual al parámetro y OM, el doble de HM. Por lo cual resulta que NO es una vez y media RO; HO, una vez y media OM, y la restante, NH, es una vez y media la restante —es decir, RM—. Por tanto, el eje es mayor en la recta HO que una vez y media el parámetro —es decir, RM—. Y dado que se había supuesto que el segmento guardaba en peso con el líquido una proporción no menor que la que guarda el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje excede a una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, es evidente que el segmento guarda en peso con el líquido una proporción no menor que el cuadrado construido sobre HO con el cuadrado construido sobre NO. Y la proporción que guarda en peso el segmento con el líquido es la que guarda la parte sumergida del segmento con el segmento entero —pues eso se ha demostrado [Prop. 1]—. Pero la proporción que guarda la parte sumergida del segmento con el segmento entero es la que guarda el cuadrado construido sobre PF con el cuadrado construido sobre NO —pues se ha demostrado en el tratado *Sobre conoides* que si de un paraboloide se cortan dos segmentos mediante dos planos trazados de cualquier manera, los segmentos guardarán en-

[13] *Cf.* en este mismo tratado la prop. 2, 350, 14 y ss. y nota.

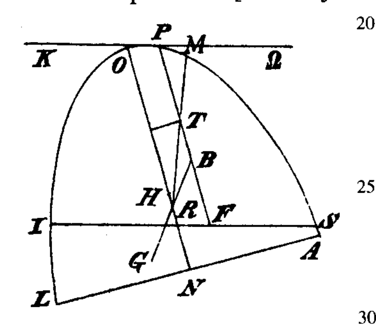
tre sí la misma proporción que guardan los cuadrados construidos sobre sus ejes [*Con. esf.* 24]—. Luego el cuadrado construido sobre PF no guardará con el cuadrado construido sobre NO una proporción menor que la que guarde el cuadrado construido sobre HO con el cuadrado construido sobre NO; por tanto, PF no es menor que HO [*Elem.* V 7-8] ni BP menor que MO; por tanto, si desde M se traza una recta hasta NO caerá entre B y P. Por tanto, dado que PF es paralela al diámetro mientras que MT es perpendicular al diámetro, y RM es igual al parámetro, la recta que va de R a T, una vez trazada y prolongada, formará ángulos rectos con la tangente en P; por lo cual formará ángulos iguales con IS y con la superficie del líquido que pasa por IS. Y si por B, G se trazan paralelas a RT, formarán ángulos rectos con la superficie del líquido y la parte del sólido paraboloide sumer-
359 gida en el líquido será desplazada hacia arriba según la paralela a RT que pasa por B, mientras que la parte de fuera del líquido será desplazada hacia abajo en el líquido según la prolongación de la paralela a RT que pasa por G, y eso será así siempre hasta que el paraboloide vuelva a ponerse derecho.

Proposición 5

Un segmento recto de un paraboloide cuando, siendo más liviano que el líquido, tenga un eje mayor que una vez y media el parámetro, si guarda en peso con el líquido una proporción no mayor que la que guarda el exceso en que es mayor el cuadrado construido sobre el eje que el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, depositado en un líquido de manera que su base entera esté en el líquido, si se pone inclinado no permanecerá inclinado, sino que volverá a una posición tal que su eje esté vertical[14].

[14] El caso estudiado es el de que $E > 3/2\,p$, si $P_s : P_l \leq E^2 - (E - 3/2\,p)^2 : E^2$.

Deposítese pues en el líquido un segmento como el que se ha dicho y esté su base entera en el líquido, y cortado el segmento mediante un plano que pase por el eje perpendicular a la superficie del líquido, su sección será una parábola [*Con. esf.* 11 a], y sea APOL, y sea NO el eje ⟨del segmento⟩ y diámetro ⟨de la parábola⟩, y sea IS la sección de la superficie del líquido. Y puesto que el eje no está vertical, la recta NO no formará con IS ángulos iguales. Trácese pues KΩ tangente a la parábola APOL en el punto P y paralela a IS, y por el punto P trácese PF paralela a NO, y tómense los centros de gravedad, y sea R el centro de APOL y B el de la parte de fuera del líquido y, una vez trazada BR, prolónguese hasta G, y sea G el centro de gravedad del sólido sumergido en el líquido [*cf. Equil. plan.*
I 8] y tómese una recta RM igual al parámetro, y sea OM el **360**
doble de HM y constrúyase lo demás de modo semejante a las proposiciones anteriores [Prop. 4].



Dado que se ha supuesto que el segmento guarda en peso con el líquido una proporción no mayor que la proporción que guarda el exceso en que es mayor el cuadrado construido sobre NO que el construido sobre HO con el cuadrado construido sobre NO, mientras que la proporción que guarda en peso el segmento con el líquido de igual volumen es la misma que guarda la parte sumergida del segmento con el sólido entero —pues eso se demostró en el primer teorema—, entonces la magnitud sumergida del segmento guarda con el segmento entero una proporción no mayor que la proporción indicada; luego el segmento entero guarda con la parte del segmento que queda fuera del líquido una proporción no mayor que la que guarda el cuadrado construido sobre NO con el cuadrado construido sobre HO. Luego el segmento entero guarda con la parte del segmen-

to que queda fuera del líquido la misma proporción que guarda el cuadrado construido sobre NO con el cuadrado construido sobre PF [*Con. esf.* 24]; luego el cuadrado construido sobre NO guarda con el cuadrado construido sobre PF una proporción no mayor que el cuadrado construido sobre NO con el cuadrado construido sobre HO. Luego PF no es menor que OH; por lo cual tampoco PB es menor que MO. Luego si desde M se traza una perpendicular hasta RO, incidirá en BP entre B y P; incida en T. Y puesto que en una parábola la recta PF es paralela al diámetro RO, mientras que MT es perpendicular al diámetro y RM es igual al parámetro, está claro que RT, prolongada, forma ángulos rectos con KPΩ; luego también con IS. Luego RT es
361 perpendicular a la superficie del líquido, y las paralelas a RT trazadas por los puntos B, G, prolongadas, serán perpendiculares a la superficie del líquido.

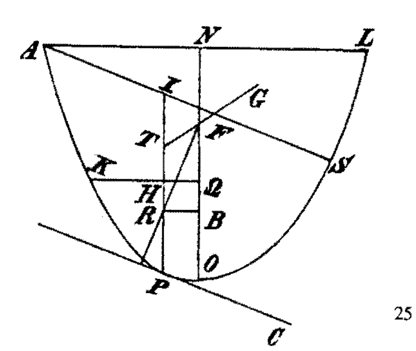
Por consiguiente, la parte del segmento que queda fuera del líquido es llevada hacia abajo del líquido según la vertical trazada por el punto B, mientras que la parte que está dentro del líquido es desplazada hacia arriba según la vertical que pasa por G, y el segmento sólido APOL no permanecerá quieto, sino que se moverá dentro del líquido hasta que la recta NO esté vertical.

Proposición 6

Un segmento recto de un paraboloide cuando siendo más liviano que el líquido tenga el eje mayor que una vez y media el parámetro pero menor que la recta que guarde la proporción de quince a cuatro con él, depositado en el líquido de manera que su base esté en contacto con el líquido, no se mantendrá inclinado de manera que su base esté en contacto con el líquido en un punto[15].

[15] Estudia el caso, para cualquier $P_s : P_l \langle 1$, de que $E \rangle 3/2\, p$ y $E : p < 15 : 4$.

Sea un segmento como el que se ha dicho y, una vez depositado en el líquido, esté, como se ha explicado, de modo que su base esté en contacto con el líquido en un punto, y cortado el segmento por el eje mediante un plano perpendicular a la superficie del líquido, sea la parábola APOL la sección en el segmento [*Conoid.* 11 a], AS la de la superficie del líquido, y sea NO el eje del segmento y diámetro ⟨de la parábola⟩, y córtese[16] por el punto F de modo que OF sea el doble de FN y por el punto Ω de modo que NO guarde con FΩ la proporción de quince a cuatro, y trácese ΩK perpendicular a NO. Así, NO guarda una proporción mayor con FΩ que con el parámetro. Sea FB igual al parámetro, y trácese una recta PC paralela a AS y tangente a la parábola en el punto P y también una recta PI paralela a NO.



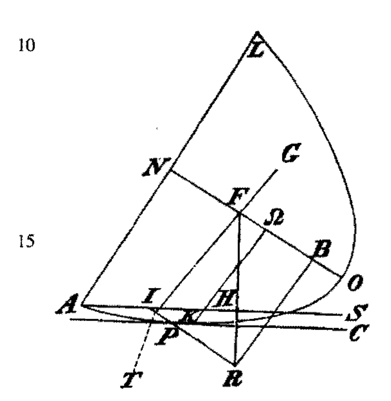
En primer lugar, corte la recta PI a KΩ.

Puesto que en el segmento APOL, comprendido por una recta y una parábola, hay una recta KH paralela a AL, una recta PI 362
paralela al diámetro y cortada por KΩ y una recta AS paralela a la tangente en P, por fuerza la recta PI o bien guardará con PH la misma proporción que NO guarda con ΩO o bien una proporción mayor —esto se demostró en un lema[17]— y ΩN es una vez y media ΩO; luego IP es una vez y media HP o es mayor que una vez y media; luego PH es el doble de HI o menor que el doble. Sea PT el doble de TI; entonces, el centro de gravedad de la parte que está en el líquido es el punto T; y una vez trazada

[16] «Córtese el diámetro», se entiende.

[17] Lema perdido para nosotros. Heath (*The works...*, pág. 273) y Ver Eecke (*op. cit.*, págs. 432-433) ofrecen demostraciones del aserto.

TF prolónguese, y sea el centro de gravedad de la parte que está fuera del líquido el punto G [*Equil. plan.* I 8] y desde B trácese la recta BR perpendicular a NO. Así, puesto que PI es paralela al diámetro NO mientras que BR es perpendicular al diámetro y FB es igual al parámetro, está claro que FR, una vez prolon-
363 gada, forma ángulos iguales con la tangente a la parábola APOL en el punto P; por lo cual también los formará con AS y con la superficie del agua. Así, las paralelas a FR trazadas por T, G serán también perpendiculares a la superficie del agua, y la magnitud del sólido APOL sumergida en el líquido será desplazada hacia arriba según la vertical que pasa por T, mientras que la parte fuera del líquido será desplazada hacia dentro del líquido según la vertical que pasa por G.



Luego el sólido APOL se dará la vuelta y su base no estará en contacto con la superficie del líquido en un punto.

De nuevo, si PI no cortara a la línea KΩ, como se describe en la segunda figura, está claro que el punto T, que es el centro de gravedad de la magnitud sumergida, caerá entre P e I, y lo demás se demostrará de manera semejante.

364

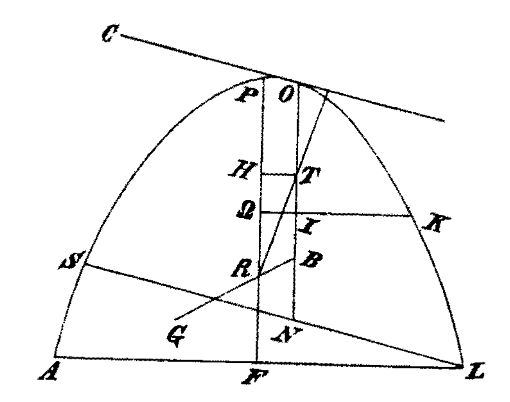
Proposición 7

El segmento recto de un paraboloide, cuando es más liviano que el líquido y tiene el eje mayor que una vez y media el parámetro, pero menor que como para guardar con el parámetro la razón de 15 a 4, depositado en el líquido de manera que su base entera esté en el líquido, nunca tomará una posición tal que su base esté en contacto con la superficie del líquido, sino que estará entera en el líquido sin tocar en ningún punto la superficie[18].

Sea un segmento como el que se ha dicho y, una vez depositado en el líquido como se ha indicado, esté en una posición tal que su base esté en contacto con la superficie del líquido.

Se ha de demostrar que no estará quieto, sino que se volcará hacia arriba de tal manera que su base no toque en ningún punto la superficie del líquido.

Una vez cortado mediante un plano perpendicular a la superficie del líquido, sea la sección la parábola ΑΠΟΛ, y sea ΣΛ la sección de la superficie del líquido, y sea ΠΦ el eje del segmento y diámetro[19], y de nuevo córtese ΠΦ, primero, por el punto P de modo que PΠ sea el doble de PΦ y, luego, por



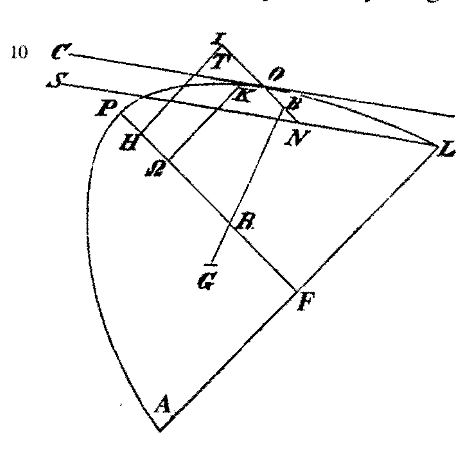
el punto Ω de manera que ΠΦ guarde con PΩ la razón de 15 a 4, y trácese ΩK perpendicular a ΠΦ. Entonces PΩ será 36
menor que el parámetro. Tómese PH igual al parámetro, y trácense TO tangente a la parábola en el punto O y que sea

[18] Se trata de las mismas condiciones que en la proposición anterior para otra posición del segmento recto de paraboloide.

[19] «De la parábola», se entiende.

paralela a ΣΛ y NO paralela a ΠΦ, y corte NO a KΩ, primero, en el punto I.

6 De manera semejante a la proposición anterior se demostrará que NO o bien es una vez y media OI o bien mayor que una vez y media. En efecto, OI es menor que el doble de IN. Sea OB el doble de BN y constrúyase igual[20].



De la misma manera se demostrará que PΘ forma ángulos rectos con TO y con la superficie del líquido y, una vez trazadas paralelas a PΘ desde los puntos B, Γ, serán perpendiculares a la superficie del líquido.

Así pues, el segmento de fuera del líquido será desplazado hacia abajo en el líquido según la vertical que pasa por B, mientras que el que está en el líquido será desplazado hacia arriba según la vertical que pasa por Γ. Así pues, está claro que el sólido se inclinará de manera que su base no toque en ningún punto la superficie del líquido, puesto que ahora, ⟨estando en contacto⟩ en un punto se des⟨plaza hacia abajo⟩, hacia el lado de Λ.

21 Y está claro que si ON no corta a ΩK, se demostrará lo mismo.

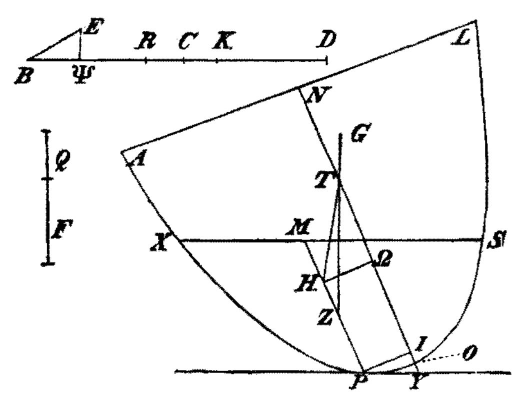
368 Proposición 8

El segmento recto de paraboloide cuando tenga el eje mayor que una vez y media el parámetro pero menor que como

[20] Como en la proposición anterior, 362, 17 y ss.; *cf.* prop. 2, 350, 13 y ss.

para guardar con el parámetro la razón de 15 a 4, cuando el peso guarde con el líquido una razón menor que la que guarda el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, depositado en el líquido de manera que su base no esté en contacto con el líquido, ni volverá a ponerse derecho ni permanecerá inclinado, a menos que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual al que vamos a decir[21].

Sea un segmento como se ha dicho y sea BΔ igual al eje y BK el doble de KΔ, y KP igual al parámetro, y sea TB una vez y media BP y TΔ una vez y media KP, y la razón que guarda en peso el segmento con el líquido guárdela el cuadrado construido sobre ΦX[22] con el cuadrado construido sobre ΔB, y sea Φ ⟨el doble de X. Así, es evidente que⟩ Φ X guarda con ΔB una razón menor que la que guarda TB con BΔ —pues TB es el



exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro—, luego ΦX es menor que BT. De modo que también Φ es 370

[21] Se estudia el caso de que, por una parte, $E > 3/2\,p$ y $E : p < 15 : 4$ y, por otra, $P_s : P_l < (E - 3/2\,p)^2 : E^2$.

[22] Es decir, «sobre el segmento Φ + X».

menor que BP. Sea PΨ igual a Φ, y trácese perpendicular a BΔ una recta ΨE tal que el cuadrado construido sobre ella equivalga a la mitad del rectángulo comprendido por KP, BΨ y trácese BE.

Se ha de demostrar que el segmento depositado en el líquido como se ha dicho tomará una posición inclinada de modo que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual al EBΨ.

Deposítese en el líquido un segmento y no esté en contacto su base con la superficie del líquido y, si es posible, no forme el eje con la superficie del líquido un ángulo igual al de vértice en B, sino, primero, mayor.

Cortado el segmento mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido, sea la parábola ΑΠΟΛ su sección, y séalo ΞΣ en la superficie del líquido, y sea el eje y diámetro[23] NO. Trácense también la recta ΠΥ paralela a ΞΣ y tangente a la parábola ΑΠΟΛ en el punto Π, la recta ΠΜ paralela a NO y la recta ΠΙ perpendicular a NO, y sea ΟΩ igual a BP y ΩΘ igual a PK y ΩΗ perpendicular al eje.

Dado que se ha supuesto que el eje del segmento formaba con la superficie del líquido un ángulo mayor que el de vértice en B, está claro que el ángulo de vértice en Υ del triángulo ΠΙΥ es mayor que el ángulo B; y el cuadrado construido sobre ΠΙ
372 guarda con el cuadrado construido sobre ΙΥ una razón mayor que el cuadrado construido sobre EΨ con el cuadrado construido sobre ΨB. Pero la razón que guarda el cuadrado construido sobre ΠΙ con el cuadrado construido sobre ΙΥ es la misma que guarda la recta KP con la recta ΥΙ, mientras que la razón que guarda el cuadrado construido sobre EΨ con el cuadrado construido sobre ΨB es la misma que guarda la mitad de la recta KP con la recta ΨB. Luego KP guarda con ΥΙ una razón mayor que la mitad de KP con ΨB. Luego, por un lado, ΥΙ es menor que el doble de ΨB y, por otro, ΙΥ es el doble de ΟΙ; por tanto, ΟΙ es menor que ΨB; de modo que ΙΩ es mayor que ΨP; y ΨP es

[23] [*Del segmento*].

igual a Φ; luego ΙΩ es mayor que Φ. Y dado que se ha supuesto que el segmento guardaba en peso con el líquido la misma razón que el cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ, y que la razón que guarda en peso el segmento con el líquido es la razón que guarda su parte sumergida con el segmento entero y, a la vez, que la razón que guarda la parte sumergida con el segmento entero es la que guarda el cuadrado construido sobre ΠΜ con el cuadrado construido sobre ON, entonces la razón que guarda el cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ es la misma razón que guarda el cuadrado construido sobre ΜΠ con el cuadrado construido sobre ON. Por tanto, ΦX es igual a ΠΜ. Y se había demostrado que ΠΗ era mayor que Φ. Por tanto está claro que ΠΜ es menor que una vez y media ΠΗ y que ΠΗ es mayor que el doble de ΗΜ. Sea pues ΠΖ el doble de ΖΜ; el centro de gravedad del sólido será el punto Θ, mientras que el centro de gravedad de la parte que está en el líquido será Ζ. Y el centro de gravedad de la magnitud restante estará en la prolongación de la recta que une ΖΘ [*Equil. plan.* I 8]. Prolónguese hacia Γ.

Del mismo modo[24] se demostrará que ΘΗ es perpendicular a 374
la superficie del líquido y que la parte del segmento que está dentro del líquido será desplazada hacia fuera del líquido según la perpendicular a la superficie del líquido trazada por Ζ, mientras que la parte de fuera del líquido será desplazada hacia dentro según la trazada por Γ. Y el segmento no permanecerá quieto según la inclinación supuesta.

Ni tampoco volverá a ponerse derecho.

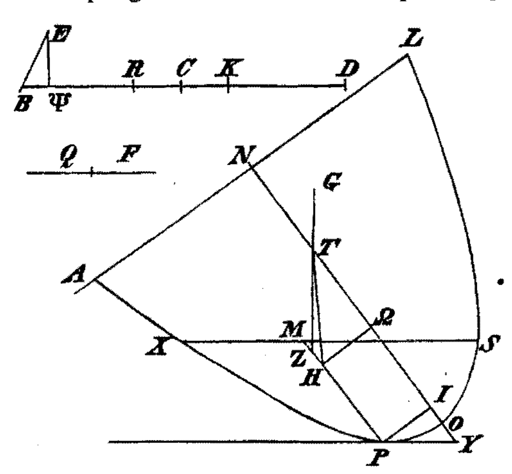
Está claro por lo siguiente: puesto que de las verticales trazadas por los puntos Ζ, Γ, la trazada por Ζ cae hacia el lado de ΓΖ en que está Λ, mientras que la que pasa por Γ cae hacia el lado en que está Α, por lo indicado anteriormente está claro que el centro Ζ será desplazado hacia arriba mientras que el Γ hacia

[24] *Cf.* prop. 4, 358, 22-24.

abajo. De modo que las partes de la magnitud entera que están del lado de A serán desplazadas hacia abajo.

Esto era útil para la demostración.

De nuevo supóngase lo demás lo mismo, pero el eje del seg-



mento con la superficie del líquido for⟨me un ángulo menor que el de vértice en B.

Y⟩ el cuadrado construido sobre ΠΙ guarda con el construido sobre ΙΥ ⟨una razón menor⟩ que la del cuadrado construido sobre ΕΨ con el cuadrado construido sobre ΨΒ. Por tanto también ΚΡ guarda con ΥΙ una razón menor que la que guarda la mitad de ΚΡ con ΨΒ. Luego ΙΥ será mayor que el doble de ΨΒ. Luego ΩΙ es menor que ΨΡ. Por consiguiente, ΠΗ será menor
376 que Φ. Y ΜΠ es igual a ΦΧ. Por consiguiente, está claro que ΠΜ es mayor que una vez y media ΠΗ y que ΠΗ es menor que el doble de ΗΜ. Sea ΠΖ el doble de ΖΜ. De nuevo el punto Θ será el centro de gravedad de la figura entera, y Ζ el de la parte que está en el líquido. Una vez trazada ΖΘ y prolongada, el ⟨centro de gravedad de la parte que está fuera del líquido estará sobre la prolongación. Sea Γ y trácense per⟩pendiculares a la superficie del líquido que pasen por los puntos Ζ, Γ,

paralelas a ΗΘ. Está claro que el segmento entero no permanecerá quieto, sino que se inclinará de modo que el eje forme con la superficie del líquido un ángulo mayor que el que forma ahora.

Puesto que el segmento no se mantendrá estable ni cuando el eje forme con el líquido un ángulo mayor que B ni cuando lo forme menor, está claro que se mantendrá estable cuando forme ese ángulo.

Pues así ΙΟ será igual a ΨΒ y ΩΙ igual a ΨΡ y ΠΗ igual a Φ; por tanto, ΜΠ es una vez y media ΠΗ y ΠΗ el doble de ΗΜ. Luego el punto Η es el centro de gravedad de la parte que está 378
en el líquido, de modo que ésta será desplazada hacia arriba según la misma vertical por la que la parte exterior es desplazada hacia abajo; luego permanecerá quieta, pues ambas partes se empujan mutuamente en sentidos opuestos.

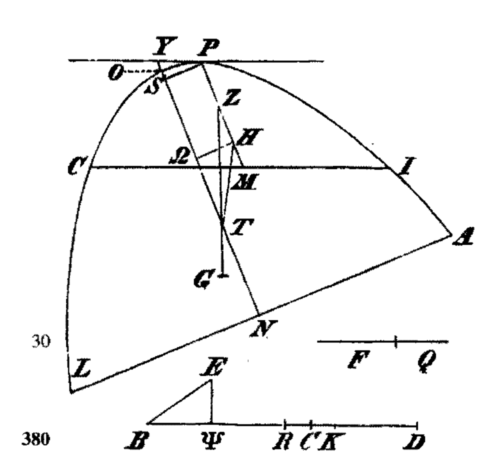
Proposición 9

El segmento recto de un paraboloide, cuando tenga el eje mayor que una vez y media el parámetro, pero menor que como para guardar[25] *la razón de 15 a 4, y en peso guarde con el líquido una razón mayor que la que guarda el exceso en que es mayor el cuadrado construido sobre el eje que el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, depositado en el líquido de tal manera que su base entera esté en el líquido, si se pone inclinado ni irá a la posición en que su eje esté vertical ni permanecerá inclinado, a menos que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual al tomado del mismo modo que en la proposición anterior*[26].

[25] «Con el parámetro», se entiende.

[26] Las condiciones propuestas son: $E > 3/2\,p$; $E : p < 15 : 4$; $P_s : P_l > E^2 - (E - 3/2\,p)^2 : E^2$.

Sea un segmento como el que se ha dicho y póngase la recta ΔB igual al eje del segmento, y sea BK el doble de KΔ, y sea KP igual al parámetro y sea TB una vez y media BP, y la razón que guarda en peso el segmento con el líquido sea la que guarda el exceso en que excede el cuadrado construido sobre BΔ al cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ, y sea Φ el doble de X.



Está claro que el exceso en que excede el cuadrado construido sobre BΔ al construido sobre BT guarda con el cuadrado construido sobre BΔ
380 una razón menor que la que guarda el exceso en que excede el cuadrado construido sobre BΔ al cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ —pues la recta BT es el exceso en que el eje del segmento es mayor que una vez y media el parámetro—. Por tanto, el cuadrado construido sobre BΔ excede al construido sobre ΦX en una magnitud mayor que aquella en la que excede el cuadrado construido sobre BΔ al cuadrado construido sobre BT. De modo que ΦX es menor que BT; luego también Φ es menor que BP.

Sea pues PΨ igual a Φ, y trácese perpendicular a BΔ la recta ΨE de modo que su cuadrado equivalga a la mitad del rectángulo comprendido por KP, ΨB.

Digo que el segmento depositado en el líquido de manera que su base entera esté en el líquido estará en una posición tal que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual a B.

Deposítese pues el segmento como se ha dicho en el líquido y no forme el eje con la superficie del líquido un ángulo igual a B, sino, primero, mayor.

Cortado éste[27] mediante un plano perpendicular a la superficie del líquido, sea la sección del segmento la parábola ΑΠΟΛ [*Con. esf.* 11 a]; la recta TI, la de la superficie del líquido, y sea NO el eje[28] y diámetro, y córtese por los puntos Ω, Θ, como antes[29], y trácense también las rectas ΥΠ, paralela a TI y tangente a la parábola en el punto Π, y ΠM[30] paralela a NO y PS 382
perpendicular al eje. Así, puesto que el eje del segmento forma con la superficie del líquido un ángulo mayor que B, de modo semejante el ángulo SΥP será mayor que el ángulo B [*Elem.* I 29]; luego el cuadrado construido sobre PS guarda con el cuadrado construido sobre SΥ una proporción mayor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΨE con el cuadrado construido sobre ΨB[31]; luego también KR guarda con SΥ una proporción mayor que la mitad de KR con ΨB; luego SΥ es menor que el doble de ΨB [*Elem.* V 10] y SO menor que ΨB; luego ΣΩ es mayor que PΨ y ΠH mayor que Φ. Y puesto que el segmento guarda en peso con el líquido la misma razón que el exceso en que el cuadrado construido sobre BΔ es mayor que el cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ y, por otro lado, la razón que guarda en peso el segmento con el líquido es la misma que guarda la parte sumergida del segmento con el segmento entero, está claro que la parte sumergida guardará con el segmento entero la misma razón que guarda el exceso en que excede el cuadrado construido sobre BΔ al cuadrado construido sobre ΦX con el cuadrado construido sobre BΔ. Por consiguiente, el segmento entero guardará con la parte de fuera del líquido la razón que guarda el cuadrado construido

[27] « El segmento», se entiende.

[28] [*De la parábola*].

[29] *Cf.* prop. 8 (370, 12) y ss.

[30] Para el texto que va de aquí a 382, 10 nos servimos de la versión latina de Guillermo de Moerbeke.

[31] *Cf.* prop. 8 (370, 23 y ss.).

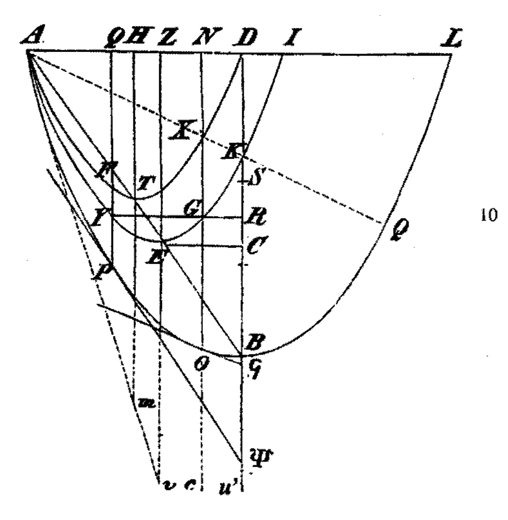
sobre BΔ con el cuadrado construido sobre ΦX. Y la razón que guarda el segmento entero con la parte de fuera del líquido es la que guarda el cuadrado construido sobre NO con el cuadrado construido sobre ΠM. Luego MΠ es igual a ΦX. Y se ha demostrado que ΠH era mayor que Φ. Luego MH es menor que X. ⟨Por tanto, ΠH es⟩ mayor ⟨que el doble⟩ de ⟨HM. Sea ΠZ el doble de ZM y, una vez trazada ZΘ, prolónguese hacia Γ.
384 Entonces Θ será el centro de gravedad del segmento entero, y el de la parte de fuera⟩ del líquido será ⟨Z, y el de la parte de dentro estará en la recta ΘΓ. Sea⟩ Γ.

⟨Del mismo modo que en las proposiciones anteriores[32] se demostrará que ΘH⟩ es perpendicular a ⟨la superficie del líquido y que las líneas⟩ trazadas ⟨paralelas a ΘH pasando por Z, Γ⟩ serán perpendiculares también ellas a la superficie del líquido. Por tanto, el segmento que queda por fuera del líquido será desplazado hacia abajo según la vertical que pasa por Z, mientras que el de dentro será desplazado hacia arriba según la que pasa por Γ. Así, la figura entera no permanecerá sin inclinarse. Ni tampoco se volcará lo de abajo arriba de modo que el eje quede perpendicular a la superficie del líquido, puesto que la parte que está hacia ⟨Λ será llevada hacia abajo, mientras que la parte que está hacia A será desplazada hacia arriba⟩, por razonamientos análogos a los expresados en las proposiciones previas.

Y si el eje forma con el líquido un ángulo menor que B, se demostrará de manera semejante a las proposiciones anteriores que el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará hasta que el eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual a B.

Proposición 10

El segmento recto de paraboloide, cuando, siendo más liviano que el líquido, tenga un eje mayor que como para guardar con el parámetro la razón de 15 a 4, depositado en el líquido de modo que su base no esté en contacto con el líquido, unas veces se quedará derecho y otras inclinado; a veces, inclinado de tal modo que su base esté en contacto con la superficie del líquido en un punto, y eso lo hará en dos inclinaciones; a veces, **386** *quedará inclinado de modo que de su base se moje un espacio mayor; a veces, inclinado de manera que su base no esté en contacto en ningún punto con la superficie del lí⟨quido. La razón que guardará en⟩ peso con el líquido cada uno de ellos se* 6 *pondrá de manifiesto ahora*[33].



Sea un segmento como se ha dicho y, cortado mediante un plano perpendicular a la superficie del líquido, sea la sección en superficie la parábola ΑΠΟΛ, y sea BΔ el eje[34] y diámetro de la parábola, y córtese BΔ por el punto K de modo que BK sea el doble de KΔ, y por el punto T de manera que ΔB guarde con KT la razón de 15 a 4. Es evidente que KT es mayor que el parámetro. Sea KP igual al parámetro, y sea PΣ la mitad de BP; y ΣB es una vez y media BP. Una vez trazada AB

[32] *Cf.* prop. 4, 358, 17 y ss.

[33] La proposición contempla seis casos —cuyos enunciados se completan más adelante (390, 9-393, 2)— que tienen en común la condición de que $E : p > 15 : 4$.

[34] «Del segmento», se entiende.

y construida la perpendicular TE[35], trácese EZ paralela a BΔ, y cortada de nuevo por la mitad la recta AB por el punto Θ, trácese ΘH paralela a BΔ, y tómese la parábola AEI de diámetro EZ y la parábola AΘΔ de diámetro ΘH de modo que las parábolas
388 AEI, AΘΔ sean semejantes a la parábola ABΛ. La parábola AEI se describirá pasando por K, y la perpendicular trazada desde P a BΔ cortará a la parábola AEI. Córtela en los puntos ϒ, Γ y por los puntos ϒ, Γ trácense las rectas ϒX, ΓN paralelas a BΔ, y corten éstas a la parábola AΘΔ en los puntos Ξ, Φ, y trácense ΠΨ, OϚ tangentes a la parábola AΠOΛ en los puntos O, Π. Así, han sido dados tres segmentos, AΠOΛ, AEI, AΘΔ, comprendidos por rectas y parábolas, rectos y semejantes, pero desiguales, y de cada base se han tomado las rectas NΞ, NΓ, NO, trazadas a partir de N; por tanto, OΓ guardará con ΓΞ la razón compuesta de la que guarda IΛ con ΛA y la que guarda AΔ con ΔI. Y ΛI guarda con ΛA la razón de dos a 5, pues como dos a 5 son TB a BΔ, y también EB a BA y ΔZ a ΔA; y ΛI, ΛA
390 son el doble de éstas[36]. Y AΔ guarda con ΔI la razón de cinco a 1, y la razón compuesta de la que guarda dos con 5 y de la que guarda cinco con uno es la misma que la que guarda dos con 1; luego OΓ es el doble de ΓΞ. Por la misma razón también Πϒ es el doble de ϒΦ. Y puesto que ΔΣ es una vez y media KP, es evidente que BΣ es el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro.

Así, si el segmento guarda en peso con el líquido la razón que guarda el cuadrado de lado BΣ con el cuadrado de lado BΔ o una razón mayor que ésa, si se deposita el segmento en el líquido de modo que la base del segmento no esté en contacto con el líquido, se mantendrá derecho[37].

[35] «Perpendicular a BΔ», se entiende (el punto T aparece en la figura, que lleva letras latinas, como C). El punto T se ha tomado de modo que ΔB : KT :: 15 : 4.

[36] «El doble de ΔZ y ΔA» respectivamente, se entiende.

[37] Primer caso: $P_s : P_l \geq (E - 3/2\ p)^2 : E^2$.

Pues se ha demostrado antes [Prop. 4] que[38] un segmento con el eje mayor que una vez y media el parámetro, si guarda en peso con el líquido una razón no menor que la que guarda el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre el eje, depositado en el líquido de la manera que se ha dicho, se mantendrá derecho.

Y cuando el segmento guarde en peso con el líquido una razón menor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΣB con el cuadrado construido sobre BΔ, pero mayor que el cuadrado construido sobre OΞ con el cuadrado construido sobre BΔ, si se lo deposita inclinado en el líquido de tal manera que su base no esté en contacto con el líquido, tomará una posición inclinada de tal manera que su base no toque la superficie del líquido en ningún punto y su eje forme con la superficie del líquido un ángulo mayor que el de vértice en Ϛ[39].

Si el segmento guarda en peso con el líquido la razón que 392 *guarda el cuadrado construido sobre ΞO con el cuadrado construido sobre BΔ, depositado en el líquido inclinado de tal manera que su base no esté en contacto con el líquido, se mantendrá inclinado de manera que su base toque en un punto la superficie del líquido y su eje forme con la superficie del líquido un ángulo igual al de vértice en Ϛ*[40].

Y si el segmento guarda en peso con el líquido una razón menor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΞO con el cuadrado construido sobre BΔ, pero mayor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΠΦ con el cuadrado construido sobre BΔ, depositado en el líquido y puesto inclinado de

[38] [*Si*].

[39] Segundo caso: $O\Xi^2 : E^2 < P_s : P_l < (E - 3/2\ p)^2 : E^2$.

[40] Tercer caso: $P_s : P_l :: \Xi O^2 : E^2$.

manera que su base no esté en contacto con el líquido, se mantendrá inclinado de modo que su base sea cortada por el líquido en un espacio mayor[41].

Y si el segmento guarda en peso con el líquido la razón que guarda el cuadrado construido sobre ΠΦ con el cuadrado construido sobre BΔ, depositado en el líquido y puesto inclinado de manera que su base no esté en contacto con el líquido, se mantendrá inclinado de manera que su base esté en contacto en un punto con la superficie del líquido y su eje forme un ángulo igual al de vértice en Ψ[42].

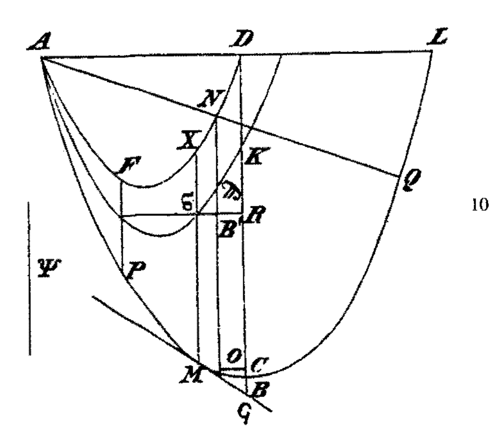
Y si el segmento guarda en peso con el líquido una razón menor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΠΦ con el cuadrado construido sobre BΔ, depositado en el líquido y puesto inclinado de manera que su base no esté en contacto con el líquido, se mantendrá inclinado de tal manera que su eje for-
393 *me con la superficie del líquido un ángulo menor que Ψ y que su base no esté en contacto en ningún punto con la superficie del líquido*[43].

Esto se demostrará a continuación:

394 En primer lugar[44], guarde el segmento en peso con el líquido una razón mayor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΞO con el cuadrado construido sobre BΔ, pero menor que la que guarda el cuadrado construido sobre el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro con el cuadrado construido sobre BΔ, y supóngase construida la figura anterior[45]

[41] Cuarto caso: $\Pi\Phi^2 : E^2 < P_s : P_l < \Xi O^2 : E^2$.
[42] Quinto caso: $P_s : P_l :: \Pi\Phi^2 : E^2$.
[43] Sexto caso: $P_s : P_l < \Pi\Phi^2 : E^2$.
[44] Comienza aquí la demostración del segundo caso.
[45] *Cf.* la figura de la pág. 231.

y la razón que guarda en peso el segmento con el líquido sea la que guarde el cuadrado construido sobre Ψ con el cuadrado construido sobre BΔ. Y Ψ es mayor que ΞO, pero menor que el exceso en que el eje es mayor que una vez y media el parámetro. Insértese entre las parábolas AΠOΛ, AΞΔ[46] una recta NO igual a Ψ y corte esa misma recta a la parábola restante en el punto ϡ, y a la recta Rς en el punto B'.



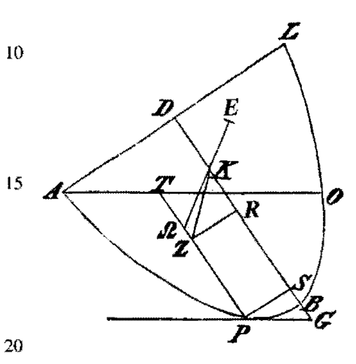
Se demostrará que Oϡ es el doble de ϡN como se demostró que Mς era el doble de ςX[47], y desde O trácese una recta Oϙ
395 tangente a la parábola APOL, una recta OC perpendicular a BD y trácese una recta uniendo A con N; entonces AN, QN serán iguales, pues dado que en los segmentos semejantes APOL, AXD han sido trazadas AN, AQ desde las bases hasta las parábolas formando ángulos iguales con las bases, las rectas QA, AN guardarán la misma razón que LA, AD según la construcción de la segunda figura; luego AN es igual a QN y paralela a Oϙ.

Se ha de demostrar que, depositado en el líquido de modo que su base no esté en contacto en ningún punto ⟨con el líquido, se mantendrá inclinado de modo que su base no esté en contacto en ningún punto con la superficie del líquido y⟩ el eje 396

[46] El largo pasaje que sigue (394,13-399, 6) procede de la versión latina de Moerbeke.
[47] *Cf.* 390, 4.

forme con la superficie del líquido un ángulo agudo mayor que ϛ[48].

Deposítese, pues, y esté en una posición tal que su base esté en contacto con la superficie del líquido en un punto, y cortado el segmento mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido, sea la sección del segmento la parábola APOL [*Con. esf.* 11a] y la de la superficie del líquido la recta OA, y sea BD el eje[49] y diámetro, y córtese BD por los puntos K, R, según se ha dicho[50], y trácese también PG paralela a la recta AO y tangente a la parábola APOL en el punto P, y la recta PT paralela a BD y la recta PS perpendicular a BD.



Puesto que el segmento guarda en peso con el líquido la misma razón que el cuadrado construido sobre Ψ con el cuadrado construido sobre BD y, por otro lado, la razón que guarda el segmento con el líquido es la que guarda la parte sumergida con el segmento entero [Prop. 1] y la que guarda la parte sumergida con el segmento entero es la que guarda el cuadrado construido sobre TP con el cuadrado construido sobre DB [*Con. esf.* 24], entonces Ψ será igual a TP. Y por tanto NO es igual a TP; por lo cual los segmentos APQ, APO son iguales [*Con. esf.* 24]. Puesto que OA, AQ han sido trazadas en los segmentos iguales y semejantes APOL, AMQL desde los extremos de sus bases y los segmentos cortados forman con los diámetros ángulos iguales según la construcción de la tercera figura[51],

[48] Este ángulo es denominado Ψ en la primera figura de la ilustración.

[49] [*De la sección*].

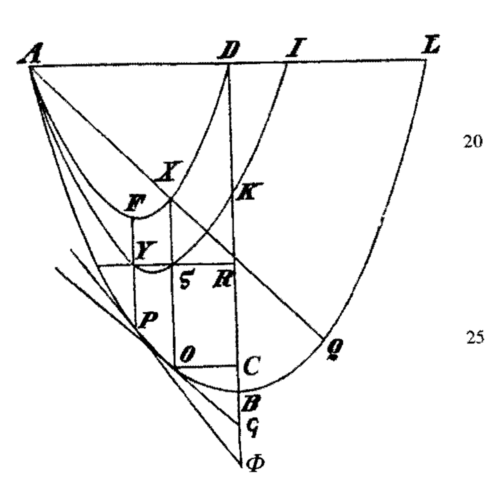
[50] Es decir, «de modo que BK sea el doble de KD y que DB guarde con KR la proporción de 15 a 4»; *cf.* más atrás 386, 12 y ss.

[51] Se refiere a la figura de esta página.

entonces los ángulos de vértice en ϛ, G son iguales. Por tanto, 397
ϛB, GB son iguales; por lo cual también SR es igual a CR, PZ igual a OB' y ZT a B'N. Y dado que OB' es menor que el doble de B'N, está claro que PZ es menor que el doble de ZT. Sea pues PΩ el doble de ΩT y una vez trazada KΩ prolónguese hasta E. Entonces K será el centro de gravedad de la figura entera y Ω el centro de la parte que está dentro del líquido, y el de la parte que queda fuera estará en la línea KE; y sea E [*Equil. plan.* I 8]. Por otro lado, KZ será perpendicular a la superficie del líquido; por lo cual lo mismo sucederá con las paralelas a KZ trazadas por los puntos E, Ω. Luego el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará de modo que su base no esté en contacto con la superficie del líquido en ningún punto, dado que ahora está inclinada y está en contacto con ella en un punto.

Luego es evidente que el segmento quedará estable de manera que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo mayor que ϛ.

Y guarde en peso el segmento con el líquido la razón que guarda el cuadrado construido sobre XO con el construido sobre BD, y póngase en el líquido inclinado de este modo[52].



Cortado mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido, sea la sección del sólido

[52] Demostración del tercer caso. Como en la figura de la pág. 238.

la parábola APOL y OI la de la superficie del líquido, y sea
398 BD el eje del segmento y diámetro de la sección, y córtese BD como antes[53] y trácese PN paralela a IO y tangente a la parábola en el punto P, y sea PT paralela a BD y PS perpendicular a BD.

Se ha de demostrar que el segmento no permanecerá inclinado así, sino que se inclinará hasta que su base esté en contacto en un punto con la superficie del líquido.

Constrúyase lo que se dispuso en la figura anterior[54] y trácese CO perpendicular a BD y, una vez trazada AX, prolónguese hasta Q; entonces AX será igual a XQ; y trácese OϚ paralela a AQ.

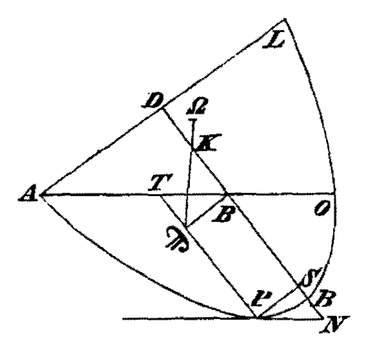
Y dado que se supone que el segmento guarda en peso con el líquido la razón que guarda el cuadrado construido sobre XO con el cuadrado construido sobre BD, también el segmento sumergido guarda esta razón con el segmento entero [Prop. 1], esto es, la del cuadrado construido sobre TP con el cuadrado construido sobre BD [*Con. esf.* 24] y PT será igual a XO. Y puesto que los diámetros de los segmentos IBO, ABQ son iguales, también lo serán los segmentos [*Con. esf.* 24]. De nuevo, puesto que en los segmentos iguales y semejantes APOL, AOQL han sido trazadas las rectas AQ, IO, que cortan segmentos iguales, pero uno desde el extremo de la base y otro no desde el extremo, está claro que forma con el diámetro del segmento entero un ángulo agudo menor la que ha sido trazada desde el extremo de la base. Y pues-

[53] Es decir, de tal modo que BK = 2 KD y que DB : BR :: 15 : 4 (*cf.* más atrás 386, 12 y ss.).

[54] La de la pág. 235.

to que el ángulo de vértice en Ϛ es menor que el de vértice en N, 399
BC es mayor que BS, mientras que CR es menor que RS; por lo cual también OϚ es menor que Pϡ, ⟨y ϚX⟩ mayor que ϡT. Y puesto que OϚ es el doble de ϚX, es evidente que Pϡ es mayor que el doble de ϡT. Sea pues PH el doble de HT[55] y trácese HK y prolónguese hasta Ω. El punto K será el centro de gravedad del segmento entero y H el de la parte que está en el líquido, y el de la parte de fuera estará en la recta KΩ. Sea Ω.

De la misma manera[56] se demostrará que la recta Kϡ es perpendicular a la superficie del líquido y que también lo son las paralelas a Kϡ que pasan por los puntos H, Ω. Así, es evidente que el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará 400
hasta que su base esté en contacto en un punto con la superficie del líquido, como[57] se demostrará sobre la tercera figura[58] tal y como se expresa en el tercer teorema[59], y el segmento permanecerá en esa posición.



En los segmentos iguales APOL, AOQL[60] habrán sido trazadas desde los extremos de sus bases las rectas AQ, AO, que cortan ⟨segmentos⟩ iguales; de manera semejante a lo anterior[61] se demostrará que APQ es igual a APO; por tanto AO, AQ formarán ángulos agudos iguales con los diámetros de los segmentos, puesto que los ángulos de vértice en N, Ϛ son

[55] Volvemos a contar con texto griego a partir de este punto.

[56] *Cf.* prop. 4 (358, 17 y ss.).

[57] De 400, 6 a 400, 24, laguna en la lectura de Heiberg, colmada con el texto latino de Moerbeke.

[58] La de esta página.

[59] Enunciado en 390, 31 y ss.

[60] *Cf.* figura de la pág. 237.

[61] *Cf.* 396, 24 y ss.

iguales [*Elem.* I 29]. Y ⟨sea Pϙ el doble de⟩ ϙT; una vez trazada la recta ϙK y prolongada hasta Ω, el punto K será el centro de gravedad del segmento entero, ϙ el de la parte del segmento que está dentro del líquido, y el de la parte que queda fuera es-
401 tará en la línea KΩ; y sea Ω [*Equil. plan.* I 8]. Y a la superficie ⟨del líquido le es perpendicular⟩ Kϙ[62]. Así, la parte que está en el líquido será desplazada hacia arriba y la ⟨que está fuera⟩ será desplazada hacia abajo según la misma recta.

Luego permanecerá quieto ⟨el segmento y⟩ la ⟨base estará en contacto en un punto con la⟩ superficie del líquido, y el eje ⟨del segmento⟩ formará con la superficie del líquido un ángulo igual al descrito anteriormente.

De nuevo[63], guarde en peso el segmento con el líquido una proporción menor que la que guarda el cuadrado construido sobre NT[64] con el cuadrado construido sobre BD, y la razón que guarda en peso el segmento con el líquido sea la que guarda el cuadrado construido sobre Ψ ⟨con el cuadrado construido sobre BD⟩.

Entonces Ψ es menor que TN. Insértese entre los segmentos
402 AMD, APOL una recta PI paralela a BD que, prolongada, sea igual a Ψ; corte a la parábola intermedia en el punto Υ, y a la recta XR en el punto H. Que ΠΥ es el doble de ΥI se demostrará como se demostró que ΓO era el doble de ΓX[65]. Trácese la recta ΠΩ tangente a la parábola AΠOΛ en el punto Π y la recta ΠE perpendicular a BΔ, y una vez trazada IA ⟨prolónguese⟩ hasta X. La recta AI será igual a IX y la AX paralela a ΠΩ.

Se ha de demostrar que el segmento, depositado en el líquido e inclinado de tal modo que su base no esté en contacto con

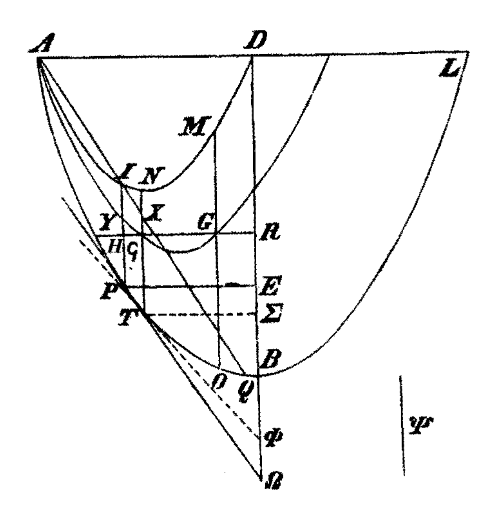
[62] A partir de este punto contamos de nuevo con texto griego.

[63] Demostración del sexto caso. Este párrafo, ilegible (hasta 402, 2) para Heiberg en el palimpsesto, procede de nuevo de la versión latina de Moerbeke.

[64] La recta que aparece como NT en la figura de la pág. 241 es la misma que PF (o sea, ΠΦ) en la figura de la pág. 231.

[65] *Cf.* más atrás, 388, 1-390, 4.

el líquido, permanecerá inclinado de modo que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo ⟨menor que Φ y su base no estará en contacto en ningún punto con la superficie del líquido.



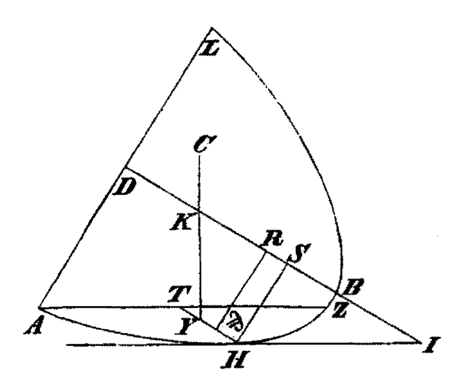
Depositese, pues, en el líquido y esté en una posición tal que su base⟩ esté en contacto en un punto con la superficie del líquido, y una vez cortado el segmento mediante un plano perpendicular a la superficie del líquido y que pase por el eje, sea la sección de la superficie del segmento la parábola AHBΛ, y
la recta AZ la de la superficie del líquido y sea el eje[66] y diáme- 404
tro de la sección la recta BΔ, y córtese BΔ por los puntos K, P de modo semejante a lo anterior[67], y trácese HI paralela a AZ y tangente a la parábola en el punto H, y trácese, por otra parte, HT paralela a BD y HS perpendicular a BD.

[66] «Del segmento», se entiende.

[67] *Cf.* más atrás 386, 12 y ss.: los puntos K, R han de estar situados de tal modo que BK = 2 KD y que DB : BR :: 15 : 4.

A partir de aquí y hasta 405, 15 dependemos de nuevo del texto latino de Moerbeke.

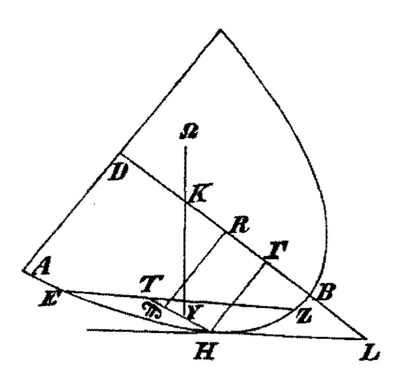
Así, puesto que el segmento guarda en peso con el líquido la razón que guarda el cuadrado construido sobre Ψ con el cuadrado construido sobre BD, y, a la vez, el segmento guarda en peso



con el líquido la razón que guarda el cuadrado construido sobre HT con el cuadrado construido sobre BD, por las mismas razones que en lo anterior[68], está claro que HT es igual a Ψ [*Elem.* V 9]; por lo cual también los segmentos AHZ, APQ son iguales [*Con. esf.* 24][69]. Y puesto que en los segmentos iguales y semejantes APOL, AHZL se han trazado desde los extremos de sus bases las rectas AQ, AZ que cortan segmentos iguales, está claro que formarán ángulos iguales con los diámetros de los seg-
405 mentos. Entonces también son iguales los ángulos con vértice en I, Ω de los triángulos HIS, PΩE; ⟨por tanto,⟩ también serán iguales SB, EB; por lo cual también serán iguales SR a ER y Hϡ a PH y ϡT a HI[70]. Y puesto que PΥ es el doble de ΥI, está claro que Hϡ es menor que el doble de ϡT. Sea una recta HΥ que sea el doble de ΥT y, una vez trazada, trácese ΥKC; entonces, los centros de gravedad son K el del segmento entero e Υ el de la parte de dentro del líquido; y el de la parte de fuera está en

[68] Prop. 1; *cf.* 396, 19 y ss.
[69] *Cf.* la figura de la pág. 241.
[70] *Cf.* más atrás 397, 1 y ss.

la línea KC, y sea C [*Equil. plan.* I 8]. Y por el teorema precedente[71] será evidente que el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará de modo que su base no toque la superficie del líquido en ningún punto.



Y se demostrará que quedará en una posición tal que su eje forme con la superficie del líquido un ángulo menor que Φ.

Quede, si es posible, en una posición tal que forme un ángulo no menor que el ángulo Φ, y lo demás constrúyase igual que 406
en la tercera figura[72].

Se demostrará del mismo modo que ΘH es igual a Ψ[73]; de modo que también es igual a IΠ. Y puesto que el ángulo Λ no es menor que el ángulo Φ, entonces tampoco ΓB es mayor que ΣB, ni ΓP menor que ΣP ni Hϡ menor que ΘϚ. Y puesto que IΠ es una vez y media ΠΥ, que ΠΥ es menor que ΘϚ, que HΘ es igual a ΠI y que Hϡ no es menor que ΘϚ, ϡH será mayor que ΠΥ. Luego Hϡ es mayor que el doble de ϡΘ. Sea HΥ el doble de ΥΘ, y una vez trazada ΥK, prolónguese. De manera semejante a lo anterior[74], es evidente que el segmento no permanece-

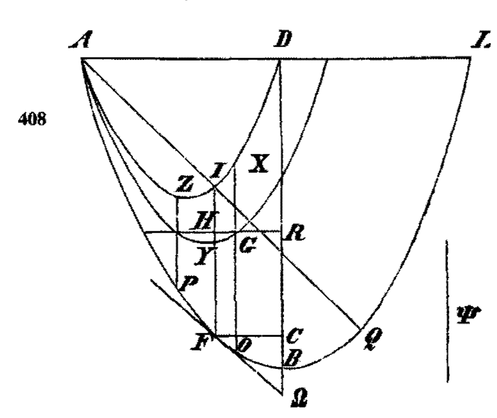
[71] *Cf.* más atrás, 397, 9 y ss.
[72] *Cf.* la figura de la pág. 236.
[73] *Cf.* más atrás, 396, 24 y ss.
[74] *Cf.* más atrás, 397, 6 y ss.

rá quieto, sino que se inclinará de modo que su eje ⟨forme un ángulo menor que Φ⟩ con la superficie del líquido.

Se demostrará también de manera semejante[75] ⟨que⟩ si el segmento guarda en peso con el líquido la misma razón que el cuadrado construido sobre NT con el cuadrado construido sobre BD, depositado en el líquido de manera que su base no esté en contacto con la superficie del líquido, se mantendrá inclinado de manera que su base esté en contacto con la superficie del líquido en un punto, y que su eje formará con la superficie del líquido un ángulo igual al ángulo de vértice en Φ.

Sea de nuevo[76] un segmento que guarde en peso con el líquido una razón mayor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΖΠ con el cuadrado construido sobre ΒΔ, pero menor que la que guarda el cuadrado construido sobre ΞΟ con el cuadrado construido sobre ΒΔ, y guarde el cuadrado construido

408 sobre Ψ con el cuadrado construido sobre ΒΔ la razón que guarda en peso el segmento con el líquido. Es evidente que Ψ es mayor que ΖΠ pero menor que ΞΟ [*Elem.* V 10]. Insértese en el espacio entre los[77] ΑΞΔ y ΑΠΟΛ una recta ΦΙ, igual a Ψ y paralela a ΒΔ, que corte a la parábola de en medio en el punto Υ. De



[75] Demostración del quinto caso.

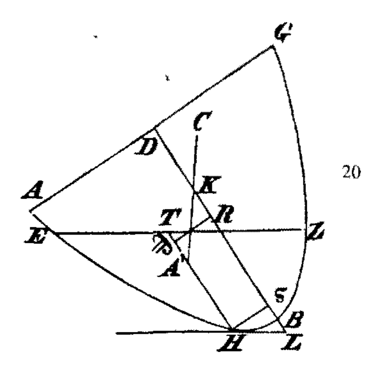
[76] Pasa ahora a demostrar el cuarto caso.

[77] [*Segmentos*].

nuevo se demostrará que ΦΥ es el doble de ΥΙ como se demostró que ΟΓ es el doble de ΞΓ[78]. Desde Φ trácese ΦΩ tangente al segmento ΑΠΟΛ en el punto Φ. De la misma manera que en lo anterior[79] se demostrará que ΑΙ es igual a ΧΙ y que ΑΧ es paralela a ΦΩ.

Se ha de demostrar que si se deposita el segmento en el líquido de modo que su base no esté en contacto con la superficie del líquido y se pone inclinado, se inclinará de modo que su base sea cortada por el líquido en un espacio mayor.

Deposítese, pues, en el líquido, como se ha dicho, y esté primero inclinado de tal modo ⟨que su base en ningún punto⟩ esté en contacto con la superficie del líquido, y una vez cortado mediante un plano que pase por el eje y perpendicular a la superficie del líquido, en la superficie del segmento resulta como sección la parábola ΑΒΓ y en la del líquido la recta ΕΖ, y sea ΒΔ el eje[80] y diámetro[81], y córtese ΒΔ por los puntos Κ, Ρ de modo semejante a lo anterior[82], y trácense también la recta



ΗΛ paralela a ΕΖ y tangente a la sección[83] ΑΒΓ en el punto Η, 410
la recta ΗΘ paralela a ΒΔ y la recta ΗΣ perpendicular a ΒΔ.

Puesto que el segmento guarda en peso con el líquido la razón del cuadrado construido sobre Ψ con el cuadrado construido sobre ΒΔ, es evidente que Ψ es igual a ΗΘ, pues se demos-

[78] *Cf.* más atrás, 390, 4 y ss.

[79] *Cf.* más atrás, 395, 7 y ss.

[80] [*De la sección*].

[81] [*Del segmento*].

[82] *Cf.* de nuevo más atrás, 386, 12 y ss.: los puntos K, R han de estar situados de tal modo que BK = 2 KD y que DB : BR :: 15 : 4.

[83] [*Trazada desde*].

trará de la misma manera que en lo anterior[84]. De modo que HΘ también es igual a ΦI y, por tanto, los segmentos AΦX, EBZ son iguales entre sí. Y puesto que en los segmentos iguales y semejantes AΠOΛ, ABΓ han sido trazadas las rectas AX, EZ que cortan segmentos iguales, y una de ellas desde el extremo de la base, la otra no desde el extremo, la que ha sido trazada desde el extremo de la base formará con el diámetro del segmento un ángulo agudo menor. Y puesto que el ángulo Λ del triángulo HΛΣ es mayor que el ángulo Ω del triángulo ΦTΩ, está claro que Bς es menor que BT, que ςP es mayor que PT y que Hϡ es mayor que ΦH. Por tanto ϡΘ es menor que HI. Y puesto que ΦΥ es el doble de ΥI, es evidente que Hϡ es mayor que el doble de ⟨ϡΘ. Sea HA' el doble⟩ de A'Θ. A partir de esto, está claro que el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará hasta que su base toque en un punto la superficie del líquido.

Tóquela en un punto como se dibujó en la tercera figura[85], y lo demás constrúyase igual.

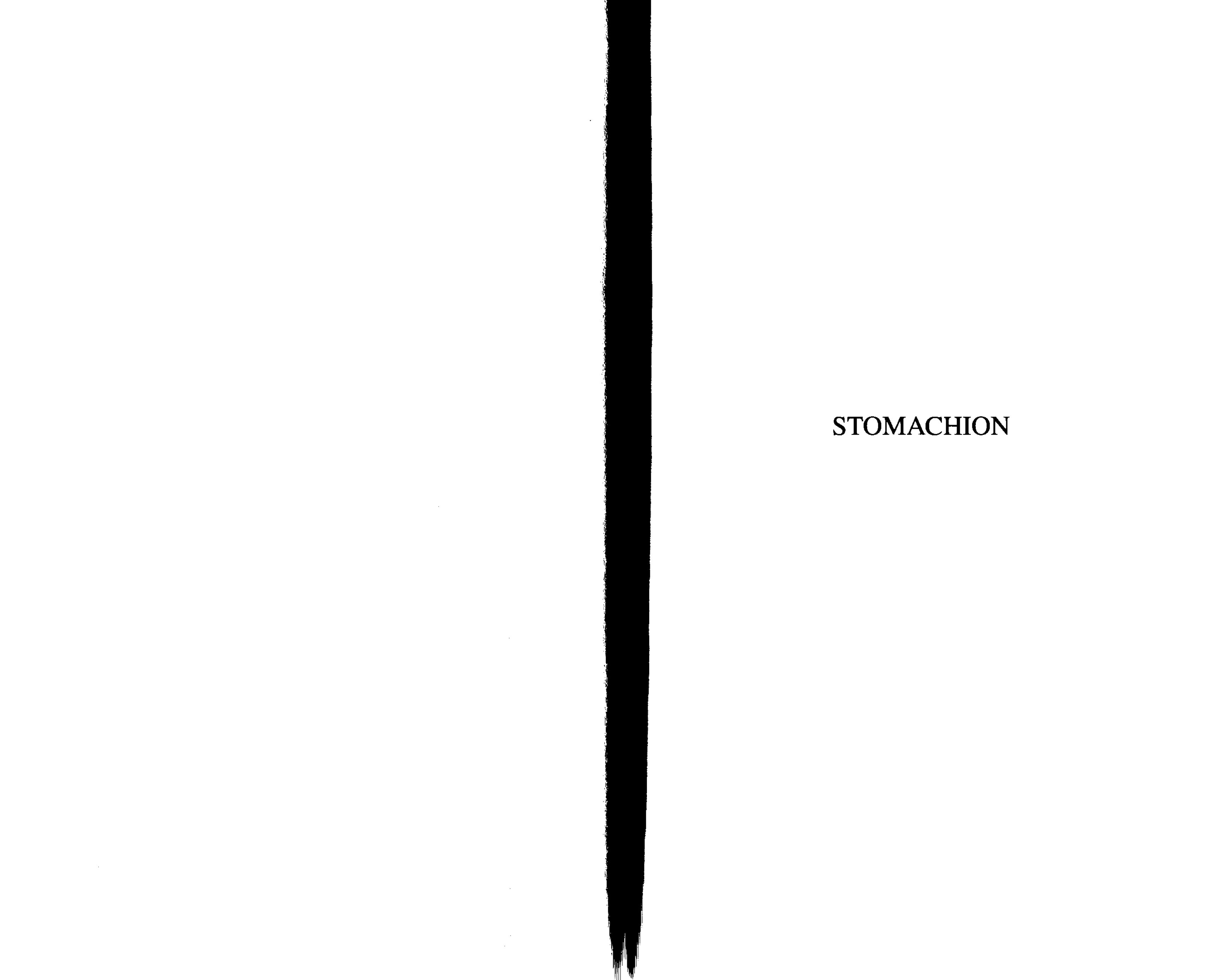
De nuevo se demostrará que
412 ΘH es igual a ΦI y que los segmentos AΦX, ABZ son iguales entre sí. Y puesto que en los segmentos iguales y semejantes AΠOΛ, ABΓ han sido trazadas las rectas AX, AZ que cortan segmentos iguales, forman ángulos iguales con los diámetros de los segmentos. Por tanto, los ángulos de vértice en Λ, Ω de los triángulos ΛHΣ, ΦTΩ son iguales, y la recta BΣ es igual a la BT, y la recta ΣP igual a la PT y la recta Hϡ igual a la ΦH y la recta ϡΘ igual a la HI. Puesto que ΦΥ es el doble de ΥI,

[84] *Cf.* más atrás, 396, 15 y ss.

[85] «La tercera figura pertinente a este caso», se entiende; se refiere a la de esta página.

está claro que Hϡ es mayor que el doble de ϡΘ. Sea pues Hϟ el doble de ϟΘ. Y de nuevo, a partir de esto, está claro que el segmento no permanecerá quieto, sino que se inclinará hacia el lado de A. Dado que se había supuesto que el segmento estaba en contacto con el líquido en un punto, está claro que la base estará comprendida por el líquido en un espacio mayor[86].

[86] El ms. que contiene la traducción de Moerbeke continúa con el siguiente colofón: «Aquí concluye el libro segundo de los *Cuerpos sumergidos en un líquido* de Arquímedes. Su traducción se completó el día diez de diciembre del año del Señor de 1269».



STOMACHION

INTRODUCCIÓN

Al igual que ocurría con el *Método*, la tradición nos había conservado memoria del título de este escrito. En textos del poeta Ausonio y de los gramáticos Ennodio, Atilio Fortunaciano y Mario Victorino[1] se mencionaba un *loculus archimedius* compuesto de «catorce láminas de marfil incluidas en una forma cuadrada»; Atilio Fortunaciano afirma que «solía aprovecharnos muchísimo para reforzar la memoria cuando éramos niños», y otros de los autores indican que las láminas podían utilizarse para componer con ellas diversas figuras —de nave, de espada, de arbolillo, de casco, de puñal, de columna...—. A falta de más testimonios, parecía que se trataba de una especie de rompecabezas o *puzzle*, un juego infantil que los antiguos usaran como estímulo de la imaginación o de las capacidades de intuición espacial, del que Arquímedes hubiera hecho materia para la investigación matemática, pero sin que supiéramos exactamente en qué sentido. En 1899, el orientalista Suter dio a conocer en traducción alemana un pasaje, conservado sólo en árabe[2], en el que, bajo el título *Sobre la división de la figura*

[1] Todas estas noticias son casi coincidentes en el tiempo, pues Ausonio y Mario Victorino vivieron en el siglo IV; para Atilio Fortunaciano, aunque su datación es incierta, suele proponerse una fecha no muy anterior; Ennodio estuvo activo en el primer cuarto del siglo V.

[2] En *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* IX (1899) 491 y ss.; el texto se conserva en dos códices de Berlín (Mf. 258 y Mq. 559), en el Bodleia-

Stomachion[3] *en catorce figuras que guardan relación con ella*, en una única proposición se resuelve la división de un rectángulo, con un lado doble del otro, en siete partes conmensurables con la figura completa, de dos maneras distintas, y con ello la división en catorce partes del cuadrado formado por dos rectángulos iguales, todas ellas conmensurables con dicho cuadrado.

El descubrimiento del palimpsesto de Jerusalén sacó a la luz, en estado especialmente lacunoso, ciertos pasajes en griego —que no conservan el dialecto dorio original— en los que leemos una breve presentación del tratado, homogénea en estilo con las que anteceden a otras obras de Arquímedes, parte del desarrollo de un primer teorema —de carácter propedéutico, según afirma el propio Arquímedes— y, por último, la parte correspondiente al trazado de la figura de un segundo teorema, que parece ocuparse de la división de un cuadrado en cinco partes conmensurables con la figura completa de dos maneras distintas, con lo que se obtiene la división en diez partes del rectángulo formado por los dos cuadrados así divididos.

Heiberg entendía que el tratado podía tener por tema el establecimiento de la conmensurabilidad entre las piezas del juego y el cuadrado que se podía obtener con ellas y, basándose en la noticia de los gramáticos latinos, pensaba que la proposición conservada en árabe —la división de una figura en catorce par-

no 960 y en otro códice del *Instituti rerum Indiae Londinensis*. Suter preparó su versión a partir de los códices de Berlín.

[3] El significado exacto del nombre *Stomachion* es una de las cuestiones filológicas pendientes; las fuentes latinas no emplean un nombre específico para designarlo, y por los textos griegos no podemos saber mucho más, ya que el término *stomáchion*, prácticamente un *hápax*, es un diminutivo de *stómachos* («orificio, estómago, garganta, parte de atrás del cuello»); *stómachos*, a su vez, deriva de *stóma* («boca»). El significado literal de *stomáchion* podría ser, por tanto, «huequito, boquilla», pero no se ve qué relación puedan tener estos términos con el contenido del juego. No parece del todo convincente la interpretación de Netz, «dolor de estómago», como si fuera derivado de *stomachikós*, que no sólo significa «dolor de estómago», sino también «bueno para el estómago». Más sobre el nombre en *Hermes* XLII, pág. 240 y ss.

tes— podía ser la proposición última del tratado. A pesar de esa afirmación, reconoce que alguna de las expresiones del pasaje introductorio le producían perplejidad[4]. También Dijksterhuis manifestaba su desconcierto[5]: «no puede asegurarse si el resultado *(scil.*, el que se obtiene en el fragmento en árabe) era el pretendido o si desempeñaba algún papel y, en ese caso, cuál, en la investigación tal como fue anunciada».

El estado de la cuestión ha dado un vuelco importante gracias a los estudios que se vienen llevando a cabo desde la recuperación del palimpsesto. El artículo publicado por Netz, Acerbi y Wilson[6] sugiere que el *Stomachion* podría ser un estudio sobre un problema de combinatoria: el número de maneras posibles en las que puede formarse un cuadrado a partir de catorce figuras dadas. Los autores basan su hipótesis en los siguientes argumentos principales: aunque se creía que no existía una combinatoria griega, una anécdota relatada por Plutarco da testimonio de los conocimientos de combinatoria de Hiparco[7]; además, en el pasaje II 416, 16 —que Heiberg dio por ilegi-

[4] Concretamente donde Arquímedes habla de la transposición y sustitución de las partes; lo que Heiberg dice, literalmente, es: «Lo que se pretenda con esto es cosa bastante oscura» *(Quod haec sibi velint, satis obscurum est).*

[5] *Op. cit.*, págs. 408-409 y otra vez en la pág. 412.

[6] «Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion», *Sciamvs* 5 (2004), 67-99.

[7] La anécdota, que figura en Plutarco *(De stoicorum repugnantiis* 1047c-e y *Quaestiones convivales* VIII 9, 732 f), nos transmite unos cálculos de Hiparco en los que éste determina el número de conjunciones que la lógica estoica permite formar con diez asertos sin negación (103049) o con ella (310954). Los artículos de Stanley («Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough», *The American Mathematical Monthly* 104 [1997], 344-50) y Habsieger, Kazarian y Lando («On the Second Nomber of Plutarch», *The American Mathematical Monthly* 105 [1998], 446) han puesto de relieve el significado combinatorio de esos resultados; el contexto filosófico y matemático en que Hiparco pudo desarrollar sus cálculos ha sido puesto de relieve por Acerbi («On the shoulders of Hipparchus. A Reappraisal of Ancient Greek Combinatorics», *Archive for History of Exact Sciences* 57 [2003], 465-502).

ble— ha podido leerse la expresión «multitud de figuras», lo que les lleva a considerar que el tratado versa sobre el número de maneras en que pueden disponerse las catorce piezas del *stomachion* manteniendo la figura global de un cuadrado; en tercer lugar, el hecho de que el camino seguido por Arquímedes en el *Stomachion* pudo muy bien ser el mismo que empleó para probar la existencia de los trece sólidos semirregulares[8]: «el estudio, en términos generales, de ciertos condicionamientos en las posibles combinaciones de los ángulos y después, considerando esos condicionamientos, enumerar los casos posibles».

Esta hipótesis es, desde luego, más sugerente que admitir como resultado definitivo del tratado la división del cuadrado en siete partes conmensurables entre sí y con la figura entera y permite superar el estado de perplejidad expresado por Dijksterhuis. Pero no se puede dejar de reconocer que lo que de verdad interesaría al mundo matemático sería entrar en contacto con los razonamientos aducidos por Arquímedes en ese estudio; la mala fortuna de que el escriba del palimpsesto utilizara solo uno de los folios de este tratado no ha permitido ir más allá.

Para la traducción hemos seguido la edición de Heiberg, que recoge el texto griego del palimpsesto, y la traducción alemana publicada por Suter, e incluye figuras preparadas por Heiberg y Heegaard a partir de los datos del texto. Indicamos mediante la cursiva los pasajes ilegibles para Heiberg y publicados ahora en el citado artículo de Netz, Acerbi y Wilson; indicamos en nota las divergencias entre ambas ediciones cuando exigen interpretaciones contrapuestas. En cuanto a la puntuación, el original griego está escrito en columnas cuyas líneas contienen de 21 a 26 letras sin separación de palabras, espíritus, acentos ni puntuación de ninguna clase; hay cierta tendencia a editar los textos matemáticos sin puntos y aparte, siguiendo el modelo de los

[8] No se nos conserva la prueba, pero sí la enumeración de estos sólidos: *vid.* más adelante los fragmentos *Sobre los poliedros,* págs. 361-365.

manuscritos, pero hemos optado por incluir puntos y aparte donde las pausas de sentido parecían exigirlo. Para el título hemos optado por conservar la transcripción del griego, sumándonos en ello a la tradición establecida por los traductores de Arquímedes a otras lenguas modernas.

Como el llamado stomachion contiene variadas posibilidades de estudio de la transposición de las figuras que lo componen, consideré necesario exponerlo *estudiando en primer lugar la magnitud de la figura entera*[1] y las partes en que se divide y a qué figura ⟨es semejante⟩ cada una de ellas[2]; y luego también queda dicho, además, cuáles son los ángulos que *se toman juntos y cómo*[3] para conocer el encaje de las figuras surgidas de ellos, y si los lados que se generan en las figuras están en línea recta o si pasa desapercibido a la vista que les falta un poco, porque estas cosas requieren habilidad; y si les falta muy poco y

[1] La cursiva indica las lecturas de Netz, Acerbi y Wilson en pasajes que Heiberg daba por lacunosos; los corchetes angulares encierran, según costumbre, las conjeturas de los editores; cuando se trata de conjeturas de Heiberg no añadimos más indicaciones; lo hacemos constar en nota cuando las conjeturas proceden de la lectura de Netz-Wilson.

En el palimpsesto, laguna de 6-8 letras en *Stoma...on*; Netz, Wilson, Acerbi se preguntan si habría que suplirlo con *Stomachion prôton* («primer libro del *Stomachion*»).

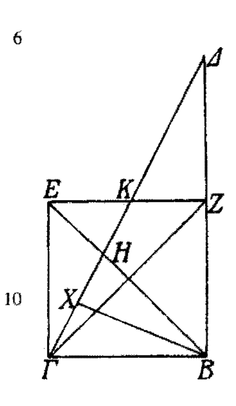
[2] Tanto la lectura de Netz, Acerbi y Wilson *(tíni metrouménou)* como la de Heiberg *(tíni homoiouménou)* están basadas en conjeturas; preferimos el texto de Heiberg por entender que la otra alternativa comporta un error sintáctico (siempre *metreîsthai hypó tinos*, no *metreîsthaí tini)*.

[3] Así siguiendo el texto de Netz, Acerbi y Wilson. Con las conjeturas de Heiberg habría que interpretarlo «cuáles son los ángulos que tomados de dos en dos forman dos rectos».

pasa desapercibido a la vista, no por eso se han de rechazar las[4] que componen.

A partir de éstas[5] resulta *una multitud* de no pocas figuras por ser *posible desplazarlas* a otro lugar de la figura igual y de ángulos iguales...*tomada de otra manera y tomando otra posición...* A veces también de dos figuras que tomadas juntas en una figura son iguales y semejantes a una figura o también de dos figuras
418 que tomadas juntas son iguales y semejantes a dos figuras se compone por transposición[6] un número mayor de figuras.

Anteponemos al tratado una demostración relativa a esto.



6 Sea ZΓ un paralelogramo rectángular[7] y *córtese en dos partes iguales* EZ por el punto K y desde los puntos Γ, B[8] trácense ΓK, BE.

Se ha de demostrar que ΓB *es mayor que* BH.

Prolónguense ΓK, BZ y coincidan en el punto Δ *y trácese* la recta ΓH.

Puesto que EK es igual a KZ, también ΓE —esto es, BZ— es igual a ZΔ. De modo que ΓZ es mayor que ZΔ. Por tanto también el ángulo comprendido por ZΔΓ es mayor que el comprendido por ZΓΔ. Y los comprendidos por HBΔ y ZΓB son iguales, pues cada uno de ellos es medio recto. Luego el

[4] Entiéndase: «las figuras».

[5] «De estas piezas», se entiende.

[6] Traduzco la lectura de Heiberg *ek tês metathéseos*; con la lectura *ektòs metathéseos* de Netz, Acerbi y Wilson habría que traducir «aparte de la transposición».

[7] El «paralelogramo rectangular» indicado tiene que ser necesariamente un cuadrado.

[8] Heiberg corrige acertadamente en Γ, B, la lectura Γ, E del palimpsesto. Téngase presente que en los textos en uncial es fácil la confusión entre B y E si se debilita la tinta en las curvas de la B.

comprendido por ΓHB también es mayor que el HΓB, puesto que el comprendido por ΓHB es igual a los dos internos y opuestos —los comprendidos por HBΔ, HΔB—. De modo que ΓB es mayor que BH. Luego, si se corta ΓH por la mitad por el punto X, el ángulo comprendido por ΓXB será obtuso —puesto que ΓX es igual a XH y XB es común, los dos son iguales a los dos[9]— y la base ΓB es mayor que la BH. Luego también el ángulo es mayor que el ángulo[10]. Por tanto, el comprendido por ΓXB es obtuso y su contiguo es agudo. Por otro lado, el comprendido por ΓBH es medio recto —pues se ha supuesto que el paralelogramo *es equiángulo*— y el comprendido por BXH es agudo.

Y *además tampoco son iguales los* restantes ΓBH[11], y ésta[12] se compone y se divide *con la siguiente ⟨parte⟩*[13].

Sea AB un área rectangular con un lado doble que el otro ... 420
que tiene el lado ΓA doble que el ΓB y que tiene por diámetro la línea AB con el espesor no...[14] *poder encajarse por tener la disposición de las secciones en línea recta.*

Córtese ΓA por la mitad por el punto E y por el punto E 6
trácese EZ paralela a BΓ. Entonces, ΓZ, ZA son cuadrados.

[9] Entiéndase: «dos lados del triángulo ΓXB iguales a dos lados del triángulo XHB».

[10] Entiéndase: «el ángulo ΓXB mayor que el ángulo XHB».

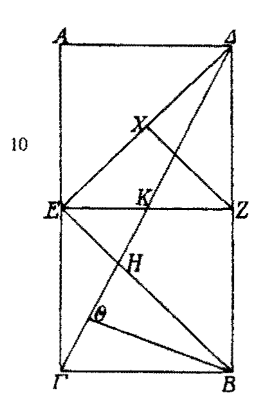
[11] El artículo femenino nos indica que las letras ΓBH se refieren, probablemente, a las rectas ΓB, BH o a los ángulos de vértice en Γ, B, H, pero en su estado presente el texto es ininteligible: de un lado, que ΓB > BH ya había quedado demostrado antes, luego no parece razonable que se repita la indicación; de otro, los ángulos de vértice en Γ, B, H no desempeñan ningún papel en la demostración —al menos en lo que queda del texto.

[12] Entiéndase: «esta figura».

[13] La laguna señalada aquí por Heiberg, de más de cinco líneas, sólo ha podido ser parcialmente colmada por la lectura de Netz, Acerbi y Wilson.

Esta frase permite ver la transición entre la primera y la segunda proposiciones conservadas, aunque no encontramos argumentos para afirmar si recoge el final de la primera o expone la hipótesis de la segunda (lo segundo sería más verosímil, pero el texto es insuficiente).

[14] Quedan aquí dos líneas que parecen definitivamente irrecuperables.



Trácense los diámetros ΓΔ, BE, EΔ y córtense por la mitad los lados ΓH, EΔ por los puntos Θ, X, y trácense BΘ, XZ, y por los puntos ⟨X⟩, K trácense las rectas K⟨Λ, X⟩Ξ[15] paralelas a BΔ. Por el teorema anterior, por tanto, es evidente que el ángulo de vértice en Θ del triángulo BΓΘ es obtuso y el restante agudo. Y también es evidente *que es mayor...*[16]

* * *

EL LIBRO DE ARQUÍMEDES SOBRE LA DIVISIÓN DE LA FIGURA STOMACHION EN CATORCE FIGURAS QUE GUARDAN RELACIÓN CON ELLA[17]

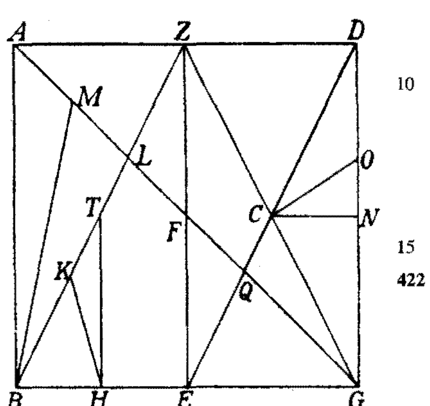
Trazamos un paralelogramo, sea el ABGD, cortamos por la mitad BG por el punto E, trazamos EZ perpendicular a BG, trazamos las diagonales AG, BZ y ZG, cortamos igualmente por la mitad BE por el punto H y trazamos HT perpendicular a BE; entonces ponemos la regla en el punto H y la dirigimos hacia el punto A y trazamos HK, cortamos por la mitad AL por el punto M y trazamos BM, y de ese modo el rectángulo AE ha
421 sido dividido en siete partes. Cortamos ahora por la mitad GD por el punto N y lo mismo ZG por el punto C, trazamos EC, colocamos la regla en los puntos B y C y trazamos CO; trazamos además CN, y de ese modo también el rectángulo ZG, si

[15] Entre corchetes, lectura dudosa y conjetura de Netz, Acerbi y Wilson.

[16] Con estas palabras termina la única hoja del palimpsesto que contiene texto del *Stomachion*. Los puntos Λ, Ξ que se mencionan en la frase anterior no figuran en la ilustración que aparece en el palimpsesto.

[17] Precede al texto árabe de la proposición: «¡En el nombre de dios misericordioso y clemente! Señor, concédeme éxito y no me lo hagas difícil».

bien de una manera distinta al primero, ha sido dividido en siete partes y, con ello, el cuadrado entero en catorce partes.



Ahora demostraremos que cada una de las catorce partes guarda con el cuadrado entero una relación de conmensurabilidad.

Puesto que ZG es la diagonal del rectángulo ZG, entonces el triángulo DZG
es la mitad de ese rectángu- 422
lo y, por tanto, la cuarta parte del cuadrado. Pero el triángulo GNC es un cuarto del triángulo DZG, puesto que si prolongamos EC, llega al punto D, y entonces el triángulo GDC es la mitad del DZG e igual a la suma de los dos triángulos GNC y DNC; por tanto, el triángulo GNC es 1/16 del cuadrado.

Si además suponemos que la línea OC llega hasta el punto B, como efectivamente fue trazada, entonces la línea NC es paralela al lado BG del cuadrado o del triángulo OBG; entonces se tiene la proporción [*Elem.* VI 2] BG : NC :: GO : NO. Y BG es el cuádruplo de NC, luego también GO es el cuádruplo de NO; por tanto, GN es el triple de NO y el triángulo GNC es igual al triple de ONC [*Elem.* VI 1]. Y dado que, como hemos demostrado, el triángulo GNC es 1/16 del cuadrado, entonces el triángulo ONC es 1/48 del cuadrado.

Puesto que, además, el triángulo GDZ es 1/4 del cuadrado y, por tanto, GNC es 1/16 del mismo y el triángulo NCO 1/48 del mismo, entonces queda que el cuadrilátero DOCZ es igual a 1/6 del área del cuadrado.

Según la hipótesis[18], si la línea NC va más lejos pasando por

[18] Puesto que DG, ZE son iguales entre sí y ambas, así como la recta ZG han sido cortadas por la mitad por los puntos N, F, C, respectivamente.

el punto F, CF sería paralela a GE; por tanto, se tiene la proporción [*Elem.* VI 4] EG : CF = EQ :: CQ = GQ : FQ. Puesto que EQ = 2CQ y GQ = 2FQ[19], entonces el triángulo EQG es el doble de cada uno de los triángulos GCQ y EFQ [*Elem.* VI 1]. Y está claro que el triángulo EGZ = 2EFG [*Elem.* VI 1], puesto que ZE = 2FE. Pero el triángulo EGZ es igual a 1/4 del cuadrado, luego el triángulo EFG es 1/8 de ese mismo cuadrado. Pero éste[20] es el triple de cada uno de los dos triángulos EFQ y GCQ; por tanto, cada uno de estos dos triángulos es 1/24 del cuadrado
423 AG. Y el triángulo EGQ es el doble de cada uno de los dos triángulos EFQ y GCQ; por tanto, es 1/12 del cuadrado.

Puesto que además ZF = EF, entonces el triángulo ZFG es igual al EFG [*Elem.* VI 1]; y si restamos[21] los triángulos GCQ = EFQ, entonces queda el cuadrilátero FQCZ igual al triángulo EGQ; por tanto, también el cuadrilátero FQCZ es igual a 1/12 del cuadrado AG.

Tenemos ahora el rectángulo ZG dividido en siete partes y pasamos ahora a la partición del otro rectángulo.

Puesto que BZ y EC son dos diagonales paralelas [*Elem.* VI 2] y ZF es igual a EF, entonces el triángulo ZLF es igual a EFQ [*Elem.* VI 19], con lo cual el triángulo ZLF = 1/24 del cuadrado AG.

Puesto que BH = HE, entonces el triángulo BEZ es el cuádruple del triángulo BHT; por tanto, cada uno de los mismos es rectángulo[22]. Pero puesto que el triángulo BEZ es 1/4 del cuadrado ABGD, entonces el triángulo BHT es 1/16 del mismo. Según nuestra hipótesis, si la línea HK va más allá, pasa por el punto A; por tanto se tiene la proporción [*Elem.* VI 4] AB : HT = BK : KT.

[19] Porque EG = 2CF.

[20] «El triángulo FEG», se entiende.

[21] «Si los restamos respectivamente de los triángulos mencionados ZFG y EFG», se entiende.

[22] Por tanto BEZ, BHT son equiángulos y guardan la razón de $BE^2 : BH^2$ [*Elem.* VI 19].

Pero AB = 2HT[23], luego también BK = 2KT, con lo cual BT = 3KT; por tanto el triángulo BHT es el triple del triángulo KHT [*Elem.* VI 1]. Y puesto que el triángulo BHT es 1/16 del cuadrado entero, entonces el triángulo KHT es 1/48 del mismo. Y el triángulo BKH es el doble del triángulo KHT [*Elem.* VI 1], luego es igual a 1/24 del cuadrado.

Puesto que, además, BL = 2ZL[24] y AL = 2LF, entonces el triángulo ABL es el doble del triángulo ALZ y el triángulo ALZ el doble del ZLF [*Elem.* VI 1]. Y puesto que, por otra parte, el triángulo ZLF es 1/24 del cuadrado entero, entonces el triángulo ALZ es 1/12 del mismo y, por tanto, el triángulo ABL es 1/6.

Pero el triángulo ABM es igual al triángulo BML [*Elem.* VI 1], por tanto cada uno de estos dos triángulos es 1/12 del cuadrado.

Y queda que el pentágono LFEHT es igual a la mitad de un 424
sexto más la mitad de un octavo del cuadrado entero[25].

Por consiguiente, hemos dividido en siete partes el cuadrado AE, con lo cual la figura completa ABGD ha sido dividida en catorce partes que guardan razón con ella; lo que había que hacer.

[23] Porque BZ ha sido cortada por el punto T en dos partes iguales.

[24] Puesto que los triángulos ABL, ZFL son equiángulos y AB = 2ZF; entonces, *vid. Elem.* VI 4.

[25] Dicho pentágono es igual a 1/2 AG / (1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/16 + 1/24) AG = AG (1/2 / 17/48) = 7/48 AG = (1/2 (1/6) + 1/2 (1/8)) AG.

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES SOBRE LOS TEOREMAS MECÁNICOS, A ERATÓSTENES

INTRODUCCIÓN

El *Método* es, sin duda, la obra de Arquímedes que en los últimos tiempos más interés ha despertado tanto entre los especialistas como, en general, entre el público culto: la peripecia casi novelesca que ha rodeado su transmisión ha contribuido enormemente a ello, y probablemente es el tratado arquimedeo que más tinta ha hecho correr en los poco más de cien años que han transcurrido desde que Heiberg lo dio a conocer[1]. Sus apariciones y desapariciones y las dificultades inherentes a la lectura del palimpsesto que la ha conservado la rodean de un halo de misterio que podría llevarnos a creer que Arquímedes trató su método como si pretendiera mantenerlo en el terreno de lo arcano. Pero nada más lejos de la verdad. De hecho, tan pronto como Arquímedes alcanzó por este método el primer resultado significativo, la cuadratura del segmento parabólico, ya mencionó a sus corresponsales alejandrinos el «método mecánico» (*Cuadr. paráb.* 266, 1 y ss.), y en el propio *Método* afirma: «al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque

[1] La suerte y avatares corridos por el palimpsesto en que se nos ha conservado la obra, conocidos en lo fundamental gracias a las noticias en los medios de comunicación, fueron presentados en la Introducción (vol. I, págs. 54-63, especialmente 58-60). El reciente libro de R. NETZ Y W. NOEL *The Archimedes Codex* (Londres, 2007; hay traducción española) informa de los pormenores de la reaparición del palimpsesto y los métodos empleados para llevar a cabo una segunda lectura del mismo.

previamente había hablado en favor de él —no fuera que les pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas— y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática», de lo que podemos deducir que en algún otro escrito no conservado ya había aludido más ampliamente a este recurso. Además, el texto fue objeto de estudio y comentario en la Antigüedad, pues Herón lo cita en sus *Metrica* y la *Suda* nos informa de que en el siglo I a. C. el astrónomo y matemático Teodosio redactó un comentario sobre esta obra. Su difusión fue tal que en el curso de las sucesivas copias llegó a perder los rasgos dialectales dorios que todavía Eutocio en el siglo VI consideraba característicos del siracusano; incluso fue reescrita en el dialecto común helenístico-romano —caso que no se dio, por ejemplo, con el tratado *Sobre las líneas espirales*— y en su texto se introdujeron, como en el resto de las obras conservadas, glosas y peculiaridades terminológicas ajenas a Arquímedes[2].

El tratado conserva la carta con que fue remitido a Eratóstenes, que no era la primera correspondencia cruzada entre ambos, pues Arquímedes afirma haberle enviado antes los enunciados de los teoremas que había descubierto y haberle invitado a descubrir las demostraciones por sí mismo.

La carta anticipa y destaca los contenidos más significativos del escrito al que acompaña: por primera vez en sus investigaciones sobre cubaturas Arquímedes ha conseguido hallar equivalencias exactas entre sólidos comprendidos parcialmente por curvas —la uña cilíndrica y la doble bóveda cilíndrica— y sólidos limitados exclusivamente por rectas y aprovecha la comunicación de estos hallazgos para mostrar a Eratóstenes este método, de utilidad «para poder investigar algunos asuntos matemáticos por

[2] Así, por ejemplo, se emplea dos veces el término *parabolḗ* —436, 1 y en 499, 32—, desconocido para Arquímedes, pues fue acuñado por Apolonio. Ídem con los términos *plagía* y *orthía* para designar los ejes de una elipse en 448, 25-26.

medio de la mecánica» y del que espera que sirva a algunos para descubrir «incluso otros teoremas que aún no se me han ocurrido».

Siguen once lemas y quince proposiciones[3], de las cuales las 6, 7, 13, 14 y 15 presentan importantes lagunas[4]. En las primeras once proposiciones Arquímedes ejemplifica el uso de su método exponiendo los razonamientos mecánicos que le llevaron a descubrir las hipótesis de ciertos teoremas que luego demostró geométricamente, «porque la investigación por este método carece de demostración; y es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada». Va recorriendo así los principales hallazgos de otros tratados suyos conservados —la medida del segmento parabólico y de la superficie de la esfera[5]; las de los volúmenes de la esfera, el elipsoide, el paraboloide, el casquete esférico y de los segmentos de hiperboloide y de elipsoide[6]— y no conservados —determinación de los centros de gravedad del segmento de paraboloide, de la semiesfera, del casquete esférico y del segmento de elipsoide y del hiperboloide[7]—. A continuación figura el estudio de la medida de la uña

[3] La numeración es obra de Heiberg, pues no figura en el original; señalan NETZ, SAITO, TCHERNETSKA en «A New Reading of *Method* Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest» (Part 2), *Sciamvs* 3 (2002), 109-125, que en algún caso esa división del texto puede oscurecer un tanto el plan de la obra pero es de necesidad conservarla, a falta de otra edición, a efectos de referencia.

[4] La numeración tanto de los lemas como de las proposiciones fue obra de Heiberg.

[5] Prop. 1 y *Cuadr. paráb.* 14-24 y prop. 2 y *Esf. cil.* I 33, respectivamente.

[6] Volumen de la esfera: prop. 2 y *Esf. cil.* I 33; del elipsoide: prop. 3 y *Con. esf.* 27 (para el semielipsoide); del paraboloide: prop. 4 y *Con. esf.* 21; del casquete esférico: prop. 7 y *Esf. cil.* II 2; del segmento de hiperboloide: prop. 11 y *Con. esf.* 25; del segmento de elipsoide: prop. 8 y *Con. esf.* 29.

[7] Props. 5, 6, 9, 10 y 11 respectivamente. Por cierto que la presencia de estos teoremas en el *Método* es el argumento definitivo para afirmar la existen-

cilíndrica[8] por el método (props. 12-14) y la correspondiente demostración geométrica (prop. 15). Éste es el final del texto recuperado. Debían de seguir a éstas otras proposiciones en las que se realizaran los mismos estudios sobre la doble bóveda cilíndrica y, probablemente, la repetición de la demostración geométrica relativa a la medida del segmento parabólico, pues así se lo anuncia Arquímedes a Eratóstenes en la misiva que le envía. Cabe la posibilidad de que se incluyeran otras demostraciones, ya que generalmente Arquímedes en estas cartas no hace enumeración completa del contenido de los tratados, y el texto, calculando las posibilidades de contenido de un rollo antiguo, podría perfectamente haber tenido hasta el doble de la extensión de lo que nos ha llegado: pero no es posible afirmar nada con certeza sobre ese punto.

El método que Arquímedes da a conocer es un recurso que él mismo considera insuficiente para la demostración, pero útil a efectos heurísticos: mediante secciones de las figuras de n + 1 dimensiones que se propone estudiar, alcanza relaciones de igualdad o proporcionalidad entre las secciones resultantes (ahora de n dimensiones) de la figura en cuestión y las secciones de otra figura cuya medida es conocida, relaciones que quedan medidas calculando los equilibrios ideales de las mismas en una balanza también ideal; el argumento siguiente es: puesto que las figuras en cuestión (de n+1 dimensiones) podrían «completarse» mediante series de secciones (de n dimensiones) trazadas del mismo modo, se puede descubrir la medida —en igualdad o proporción— de la figura objeto de estudio. Ahora bien, ¿quién, entre los matemáticos griegos de la Antigüedad, aceptaría como planteamiento geométrico que la superficie se compone de líneas o que el sólido se compone de planos? Esa cuestión estaba tratada y debatida desde antes de que Euclides redactase sus *Elementos*[9]; de ahí que se haya interpretado que el recurso a los indivisibles es la razón de la «insuficiencia» probatoria del método, más que el recurso a la mecánica.

Efectivamente, ésa es la posición de Dijksterhuis[10], aunque otros autores, como Sato y Knorr[11], llegan a la conclusión de que los matemáticos griegos aceptaban como válidos los argumentos con indivisibles. Por su parte, R. Netz, K. Saito y N. Tchernetska[12], a tenor del texto de la prop. 14 que ellos han recuperado, plantean la cuestión en términos más complejos. Mientras que en las proposiciones 1-13 Arquímedes emplea tanto la mecánica como los indivisibles, la proposición 14 recurre sólo a los indivisibles; la presencia de una única palabra, de lectura dudosa[13], les lleva a entender que Arquímedes utiliza el lema 11 para la suma de una serie proporcional infinita (en *Con. esf.* 1 Arquímedes había demostrado la validez del lema para series finitas); de aceptar su lectura e interpretación, sería necesario, como ellos sugieren, replantear no sólo la estructura general del *Método*, sino también la interpretación de la prehistoria del cálculo. La cuestión, sin duda, merece un debate más extenso —que debería incluir tanto los aspectos paleográficos como los mate-

cia de obras perdidas de Arquímedes en el terreno de la estática, obras en las que debían de encontrarse las demostraciones geométricas de estos mismos supuestos.

[8] Para la descripción de esta figura y de la doble bóveda cilíndrica, *cf.* 426, 10 y ss.

[9] Muestra evidente de ello la tenemos en ARISTÓTELES, *Sobre las líneas indivisibles*, publicado en esta misma colección (BCG 277), págs. 21-53.

[10] *Op. cit.*, pág. 336.

[11] T. SATO, «A Reconstruction of The Method Proposition 17, and the Development of Archimedes' Thought on Quadrature», *Historia Scientiarum* 31 (1986), 61-86 y 32 (1987), 61-90; W. KNORR, «The Method of Indivisibles in Ancient Geometry», en *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, ed. R. CALINGER, 67-86.

[12] «A New Reading of *Method* Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest» (Part 1), *Sciamvs* 2 (2001), 9-29 y «A New Reading of *Method* Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest» (Part 2), *Sciamvs* 3 (2002), 109-125.

[13] *Pléthei* («en número»), fol. 110v, col. 2, lín. 4.

máticos—, debate que aún no ha podido tener lugar en razón de lo reciente del hallazgo.

Por último, una breve nota textual: a primera vista, no habiendo más que un único manuscrito, el palimpsesto, debería ser un caso sencillo, pero el estado en que el texto ha podido ser recuperado dista de ser el ideal[14] y los materiales que pone ante nuestros ojos nos enfrentan a múltiples dificultades. Adelantábamos antes que algunas de las proposiciones se conservan en estado lacunoso: fueron objeto de estudio para Zeuthen, que intentó recrear las demostraciones, y Heiberg ofrece la versión latina de esa recreación[15]. En nuestra traducción figuran en redonda los pasajes procedentes del texto griego y en cursiva los pasajes traducidos a partir de la versión latina de Zeuthen reproducida por Heiberg. En cuanto a la proposición 14, los folios en los que figuraba se hallaban en un estado tan deteriorado que Heiberg renunció incluso a fotografiarlos, y su texto era tan incompleto que ni siquiera era posible seguir el curso de los razonamientos. Como adelantábamos más arriba, esos folios han podido ser leídos recientemente gracias a los avances logrados en los procesos de tratamiento informático de imágenes, y Netz, Saito y Tchernetska han publicado el texto completo de esta proposición en los artículos citados *(cf.* n. 12). Las diferencias entre este texto y el recuperado por Heiberg son tales que se hace imposible completar la lectura más antigua con la más reciente, de modo que nos ha parecido lo más oportuno ofrecer la traducción de esta última en Apéndice.

[14] Hagamos notar, por ejemplo, que la traducción de Heath, añadida como apéndice a su *The Works of Archimedes (cf.* Bibliografía), fue realizada sobre la primera edición publicada por Heiberg *(Hermes* 42 [1907], 243-297), que difiere no poco de la aparecida en *Archimedes opera omnia...* que es la que ha servido de base a la presente versión. De ahí que no coincidan la numeración y el contenido de las proposiciones.

[15] Fueron publicadas en Leipzig en 1906-1907 y han sido reimpresas en Archimedes, *Werke,* Darmstadt, 1967 junto con otros tratados arquimedeos comentados.

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES SOBRE LOS TEOREMAS MECÁNICOS, A ERATÓSTENES **II 426**

Arquímedes a Eratóstenes, salud.

Te envié antes los teoremas que había descubierto escribiéndote los enunciados, invitándote a descubrir sus demostraciones que, hasta el momento, no te había comunicado. Los enunciados de los teoremas que te mandé eran los siguientes.

Del primero: si en un prisma recto que tiene por base un paralelogramo[1] se inscribe un cilindro con sus bases en los paralelogramos opuestos y sus generatrices en los restantes planos del prisma, y por el centro del círculo que es base del cilindro y por un lado del cuadrado del plano opuesto se traza un plano, el plano trazado cortará del cilindro un segmento, que está comprendido por dos planos y la superficie del cilindro —uno, el trazado; el otro, aquél en que está la base del cilindro; la superficie, la que está entre los planos dichos—, y el segmento cortado del cilindro será la sexta parte del prisma entero.

Del otro teorema el enunciado es el siguiente: si en un cubo se inscribe un cilindro con sus bases en los paralelogramos opuestos y su superficie tangente a los cuatro planos restantes, y en el mismo cubo se inscribe otro cilindro con sus **428**
bases en otros paralelogramos y su superficie tangente a los cuatro planos restantes, la figura comprendida por las superfi-

[1] Así en el original griego, aunque por el sentido es evidente que se refiere a un cuadrado. Lo mismo sucede algo más adelante, en 426, 24 y 428, 2.

cies de los cilindros que está en ambos cilindros es dos tercios de todo el cubo.

Ocurre que estos teoremas son distintos de los que descubrí primero, pues aquellas figuras —los conoides y los elipsoides y sus segmentos— las comparábamos en magnitud con figuras de conos y cilindros y se halló que ninguna de ellas era igual a una figura sólida comprendida por planos, mientras que cada una de estas figuras, comprendidas por dos planos y superficies de cilindro, ha sido hallada igual a una de las figuras sólidas comprendidas por planos.

Tras redactar las demostraciones de estos teoremas en este libro, te las mandaré[2].

Y al ver, como digo, que eres estudioso y que destacas considerablemente en filosofía y que aprecias la investigación matemática cuando es el caso, probé a escribirte y a definir en este mismo libro la peculiaridad de cierto método mediante el cual, cuando te lo haya proporcionado, te será posible disponer de recursos para poder investigar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica. Estoy persuadido de que esto es no menos útil también para la demostración de estos mismos teoremas, pues algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, porque la investigación por este método carece de demostración; y es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las
430 cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada.

... por lo cual, de estos teoremas sobre el cono y la pirámide cuya demostración Eudoxo fue el primero en descubrir, que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide lo es del prisma, cuando tienen la misma base e igual altura, atribuiría uno no pequeña parte a Demócrito, el primero que manifestó sin demostración el aserto relativo a dicha figura.

[2] *Cf.* Introducción, págs. 268-269.

Pues a mí me ocurre en el caso del teorema que ahora edito que su descubrimiento ha sido semejante a los recién mencionados: al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente había hablado en favor de él —no fuera que les pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas— y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática. Pues sostengo que algunos, bien de los presentes, bien de los venideros, mediante el método que doy a conocer descubrirán incluso otros teoremas que aún no se me han ocurrido.

Así, escribo en primer lugar lo que también lo primero se me hizo patente mediante la mecánica: que todo segmento de la sección de un cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura, y después de eso, cada uno de los teoremas obtenidos mediante el mismo método. Al final del libro escribo las demostraciones geométricas de aquellos teoremas cuyos enunciados te envié antes.

LEMAS[3]

1. Si de una magnitud se quita una magnitud y el mismo punto es centro de gravedad de la magnitud entera y de la quitada, **432**
el mismo punto es centro de gravedad de la magnitud restante.

2. Si de una magnitud se quita una magnitud y el centro de gravedad de la magnitud entera y la magnitud quitada no es el mismo punto, el centro de gravedad de la magnitud restante se encuentra en[4] la recta que une los centros de gravedad de la magni-

[3] El título «Lemas» *(Lemmata)* y la numeración de los mismos, así como la de las proposiciones, no figura en los mss., sino que fue introducida por Heiberg. Esta numeración se ha convertido en canónica a efectos de referencia pero, como advierte Netz *(Sciamvs* 2, pág. 11), puede oscurecer la estructura de la obra.

Los enunciados que figuran en este apartado tienen el carácter de demostraciones auxiliares para el contenido de las proposiciones.

[4] Sobreentiéndase: «el extremo de».

tud entera y de la magnitud quitada, una vez prolongada y quitada de ella[5], que guarde con la recta situada entre los dichos centros de gravedad la misma razón que guarda el peso de la magnitud quitada con el peso de la magnitud restante.

3. Si en cualquier número de magnitudes el centro de gravedad[6] está sobre la misma recta, también el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas ellas estará sobre la misma recta[7].

4. El centro de gravedad de toda recta es el punto medio de la recta[8] [*Equil. plan.* I 4].

5. El centro de gravedad de todo triángulo es el punto en el que se cortan las rectas trazadas desde los ángulos del triángulo hasta los puntos medios de los lados[9] [*Equil. plan.* I 14].

6. El centro de gravedad de todo paralelogramo es el punto en el que se cortan las diagonales [*Equil. plan.* I 10].

7. El centro de gravedad de un círculo es el centro del círculo.

8. El centro de gravedad de todo cilindro es el punto medio del eje.

9. El centro de gravedad de todo prisma es el punto medio del eje.

434 10. El centro de gravedad de todo cono está en su eje dividido de tal manera que el segmento del lado del vértice sea el triple que el resto.

11. Usaremos también el siguiente teorema[10]: si un número cualquiera de magnitudes guardan de dos en dos, las dispuestas

[5] Sobreentiéndase: «una recta».

[6] «El centro de gravedad de cada una de ellas», se entiende.

[7] Se da por supuesto lo mencionado en *Sobre el equilibrio de las figuras planas* I 4 y 13, II 2 y 5. *Vid.* también I 5.

[8] Recuérdese que el concepto de *eutheîa* en griego se corresponde más bien con el nuestro de «segmento».

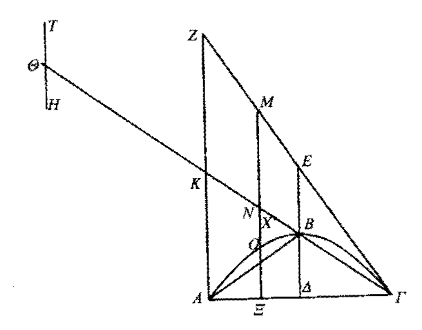
[9] Es decir, las medianas del triángulo.

[10] [*Del tratado escrito anteriormente Sobre conoides*]. La mención del tratado en el texto es probablemente una glosa (acertada).

de modo semejante, la misma razón que otras magnitudes, iguales en número, y las primeras magnitudes guardan con otras magnitudes las razones que sea —bien todas, bien algunas de ellas— y las segundas magnitudes están en las mismas razones con otras magnitudes, la suma de todas las primeras magnitudes guardará con la suma de todas las magnitudes correspondientes la misma razón que guarda la suma de todas las segundas magnitudes con todas las magnitudes correspondientes [*Con. esf.* 1].

Proposición 1

Sea el segmento ΑΒΓ contenido por la recta ΑΓ y por la sección ΑΒΓ de un cono rectángulo; y córtese ΑΒΓ por la mitad por el punto Δ y trácese la recta ΔΒΕ paralela al diámetro y trácense ΑΒ, ΒΓ.



Digo que el segmento ΑΒΓ es cuatro tercios del triángulo ΑΒΓ.

Desde los puntos Α, Γ trácense la recta ΑΖ, paralela a ΔΒΕ, y la ΓΖ, tangente a la sección, y prolónguese ΓΒ hacia Κ, y sea ΚΘ igual a ΓΚ. Considérese ΓΘ una balanza y Κ su punto medio y ΜΞ una paralela cualquiera a ΕΔ.

Puesto que ΓΒΑ es una parábola y ΓΖ le es tangente y ΓΔ es una ordenada, ΕΒ es igual a ΒΔ —pues esto se demuestra en los 436

Elementos[11]—. Por ello y porque las rectas ZA, MΞ son paralelas a EΔ, MN es igual a NΞ y ZK a KA. Y puesto que ΓA es a AΞ como MΞ a ΞO[12] y, por otro lado, ΓA es a AΞ como ΓK a KN [*Elem.* VI 2; V 18] y ΓK es igual a KΘ, entonces, ΘK es a KN como MΞ a ΞO. Y puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MΞ, ya que MN es igual a NΞ [Lema 4], entonces si ponemos TH igual a ΞO y como centro de gravedad de ella[13] el punto Θ, de modo que TΘ sea igual a ΘH, TΘH estará en equilibrio con MΞ, si permanece en el mismo lugar, por haber sido cortada ΘN de modo inversamente proporcional a los pesos TH, MΞ, y ΘK será a KN como MΞ a HT [*Equil. plan.* I 6-7]. De manera que el centro de gravedad del peso compuesto por ambas es K [Lema 3].

De modo similar, cuantas paralelas a EΔ se tracen en el triángulo ZAΓ, si permanecen en su mismo sitio, estarán en equilibrio con las rectas tomadas de ellas en la sección una vez transportadas a Θ de tal manera que el centro de gravedad del peso de ambas sea K.

Y puesto que el triángulo ΓZA está compuesto por las rectas que hay en el triángulo ΓZA, mientras que el segmento ABΓ está compuesto por las rectas de la sección tomadas de manera semejante a ΞO, entonces el triángulo ZAΓ, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio, con relación al punto K, con el segmento de la sección en torno al centro de gravedad Θ, de modo que el centro de gravedad de la suma de ambos[14] sea K.

[11] Heiberg considera la frase una interpolación, y supone que la referencia se refiere a los *Elementos de cónicas* de Euclides o Aristeo. La demostración figura en *Cuadratura de la parábola*, 2.

[12] [*Eso se demuestra en un lema*]. La frase es una interpolación; el lema, si existió, no se nos ha conservado.

[13] Es decir, de TH.

[14] Es decir, de la magnitud compuesta por ambas figuras —el triángulo más el segmento de la sección parabólica—, situada en la posición en que ahora está el triángulo.

Córtese ΓK por el punto X de manera que ΓK sea el triple que KX; entonces el punto X será el centro de gravedad del 438
triángulo AZΓ —ya está demostrado en los libros *Sobre el equilibrio* [Lema 5]—. Puesto que el triángulo ZAΓ, si permanece en su mismo sitio, se equilibra, en relación al punto K, con el segmento BAΓ en torno al centro de gravedad Θ y puesto que X es el centro de gravedad del triángulo ZAΓ, entonces el triángulo AZΓ es al segmento ABΓ situado en torno al centro Θ como ΘK es a XK. Y ΘK es el triple de KX. Luego también el triángulo AZΓ es el triple del segmento ABΓ. Y además, por otro lado, el triángulo ZAΓ es el cuádruple del triángulo ABΓ, por ser igual ZK a KA y AΔ a ΔΓ[15]; luego el segmento ABΓ es cuatro tercios del triángulo ABΓ[16].

Proposición 2

Lo anterior no queda demostrado mediante lo que se ha dicho ahora, pero ha producido cierta impresión de que la conclusión es verdadera. Por eso nosotros, al ver que no queda demostrado pero sospechando que la conclusión es verdadera, pondremos en su lugar la demostración geométrica que descubrimos, la que publicamos hace tiempo[17].

Que toda esfera es el cuádruple del cono que tiene su base igual a un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera, y que el cilindro que tiene su base igual a un círculo

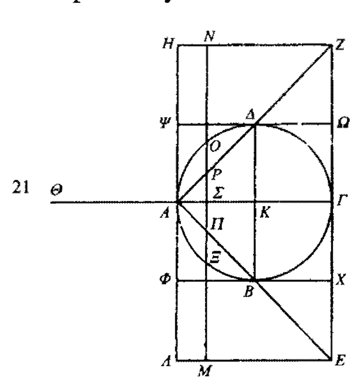
[15] Anota Heiberg: «De la proporción ΔΓ : AΓ :: ΔB : AK resulta que ΔB = 1/2 AK = 1/4 AZ», (es decir, los dos triángulos ABΓ y AZΓ tienen la misma base AΓ, pero el segundo tiene la altura cuatro veces mayor que el primero).

[16] [*Esto, en efecto, es evidente*].

[17] La demostración se encuentra en *Cuadrat. paráb.* 14-24, donde Arquímedes da dos demostraciones rigurosas y completamente distintas. Heiberg piensa que esta demostración anunciada debía de encontrarse en la parte final de este tratado, que no se nos ha conservado.

máximo de la esfera y altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera, se estudia por este método así:

Sea una esfera en la que ΑΒΓΔ es un círculo máximo y ΑΓ,
440 ΒΔ son diámetros perpendiculares entre sí y sea en la esfera un círculo de diámetro ΒΔ perpendicular al círculo ΑΒΓΔ y, a partir de este círculo perpendicular[18], constrúyase un cono con el punto A como vértice y, una vez trazada su superficie, córtese el cono mediante un plano paralelo a la base por el punto Γ. Producirá un círculo perpendicular a ΑΓ, y EZ será su diámetro. A partir de este círculo constrúyase un cilindro de eje igual a ΑΓ y sean ΕΛ, ZH las generatrices del cilindro. Y prolónguese ΓΑ y sea igual a ella ΑΘ, y considérese ΓΘ una balanza y su punto medio A, y trácese una recta MN que sea paralela a ΒΔ y corte ésta al círculo ΑΒΓΔ en los puntos Ξ, O y al diámetro ΑΓ en el punto Σ, y a la recta AE en el punto Π y a la recta AZ en el punto P y sobre la recta MN álcese un plano perpendicular a ΑΓ; éste producirá como sección en el cilindro un círculo, cuyo diámetro será MN y en la esfera ΑΒΓΔ otro círculo cuyo diámetro será ΞΟ, y en el cono AEZ otro círculo cuyo diámetro será ΠΡ.



Y puesto que el rectángulo comprendido por ΓΑ, ΑΣ es igual al comprendido por ΜΣ, ΣΠ —pues ΑΓ es igual a ΣΜ y ΑΣ es igual a ΠΣ [*Elem.* VI 4]— y, a la vez, el cuadrado de lado ΑΞ —es decir, la suma de los cuadrados de lados ΞΣ, ΣΠ [*Elem.* I 47]—, es igual al rectángulo comprendido por ΓΑ, ΑΣ [*Elem.* VI 8, corol.], entonces el rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ es igual a la suma de los cuadrados de lados ΞΣ, ΣΠ. Y puesto que ΓΑ es a ΑΣ como ΜΣ

[18] Es decir, «tomando ese círculo como base».

a ΣΠ y, por otro lado, ΓΑ es igual a ΑΘ, entonces ΘΑ es a ΑΣ como ΜΣ es a ΣΠ —esto es, como el cuadrado de lado ΜΣ al rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ—. Y se había demostrado que la suma de los cuadrados de lados ΞΣ, ΣΠ era igual al rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ. Luego ΑΘ es a ΑΣ como el cuadrado de lado ΜΣ a la suma de los cuadrados de lados ΞΣ, 442
ΣΠ. Por otra parte, el cuadrado de lado ΜΣ es a la suma de los cuadrados de lados ΞΣ, ΣΠ como el cuadrado de lado MN a la suma de los cuadrados de lados ΞΟ, ΠΡ [*Elem.*V 15] y, a su vez, el cuadrado de lado MN es a la suma de los cuadrados de lados ΞΟ, ΠΡ como el círculo de diámetro MN —en el cilindro— es a la suma de los dos círculos, el de diámetro ΠΡ —en el cono— y el de diámetro ΞΟ —en la esfera— [*Elem.* XII 2]: luego ΘΑ es a ΑΣ como el círculo en el cilindro es a la suma de los círculos en la esfera y el cono.

Por consiguiente, puesto que ΘΑ es a ΑΣ como el propio círculo del cilindro, si permanece en su mismo sitio, es a la suma de los dos círculos que tienen por diámetros ΞΟ, ΠΡ, una vez transportados y puestos en Θ, de tal manera que Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos, estarán en equilibrio con relación al punto A[19].

De la misma manera se demostrará también que, si en el paralelogramo ΛZ se traza otra paralela a EZ y por la recta trazada se construye un plano perpendicular a ΑΓ, el círculo producido en el cilindro, si permanece allí mismo, estará en equilibrio respecto al punto A con la suma de los dos círculos, el producido en la esfera y el del cono, una vez transportados y puestos en la balanza en el punto Θ, de tal manera que el punto Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos.

[19] Entiéndase que el equilibrio se produce entre el círculo en el cilindro, de un lado, y los círculos en el cono y la esfera tomados como una sola magnitud, de otro.

Heiberg sospecha que en este pasaje se ha podido producir alguna alteración del texto, ya que el original presenta anomalías sintácticas.

Y una vez completados el cilindro y la esfera y el cono mediante los círculos tomados de esa manera, el cilindro, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio respecto al punto A con ambos, la esfera y el cono, una vez transportados y puestos en la balanza en el punto Θ, de tal manera que Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos. Y puesto que los sólidos indicados están en equilibrio respecto al punto A, si el cilin-
444 dro permanece con centro de gravedad en K, y la esfera y el cono se transportan, como se ha dicho, al centro de gravedad Θ, ΘA será a AK como el cilindro a la suma de la esfera y el cono [*Equil. plan.* I 6-7]. Y ΘA es el doble de AK; luego también el cilindro es el doble de la suma de ambos, la esfera y el cono; y a la vez es el triple del propio cono [*Elem.* XII 10]. Luego tres conos son iguales a esos mismos dos conos más dos esferas. Réstense en común los dos conos[20]; entonces, un cono, el que en sección por el eje da el triángulo AEZ, es igual a las dos esferas mencionadas. Y el cono que en sección por el eje da el triángulo AEZ es igual a ocho conos que tengan por sección en el eje al triángulo ABΔ [*Elem.* XII 12], por ser EZ el doble de BΔ. Luego los ocho conos mencionados son iguales a dos esferas; luego la esfera cuyo círculo máximo es ABΓΔ es el cuádruple del cono que tiene por vértice el punto A y por base el círculo de diámetro BΔ que es perpendicular a AΓ.

Por los puntos B, Δ trácense en el paralelogramo ΛZ las rectas ΦBX, ΨΔΩ paralelas a AΓ y considérese un cilindro que tenga por bases los círculos de diámetros ΦΨ, XΩ y por eje AΓ.

Puesto que el cilindro que en sección por el eje da el paralelogramo ΦΩ es el doble del cilindro que en sección por el eje da el paralelogramo ΦΔ [*Elem.* XII 14] y este mismo es el triple del cono que en sección por el eje da el triángulo ABΔ —como en los *Elementos* [*Elem.* XII 10]— entonces el cilindro que en sección por el eje da el paralelogramo ΦΩ es el séxtuplo del cono que en sección por el eje da el triángulo ABΔ. Y se había

[20] Es decir, «réstense dos conos de ambos miembros de la igualdad».

demostrado que la esfera cuyo círculo máximo es ABΓΔ era el 446
cuádruple de este cono. Luego el cilindro es una vez y media la esfera, que es lo que había que demostrar.

Una vez estudiado esto, que toda esfera es el cuádruple del cono que tiene por base su círculo máximo y la altura igual al radio de la esfera, se me ocurrió que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera. Y es que mi suposición había sido que, puesto que todo círculo es igual a un triángulo que tiene por base la circunferencia del círculo y la altura igual al radio del círculo[21], también toda esfera es igual al cono que tiene por base la superficie de la esfera y la altura igual al radio de la esfera.

Proposición 3

Por este método se estudia también que el cilindro que tiene la base igual al círculo mayor de un elipsoide de revolución y la altura igual al eje del elipsoide es una vez y media el elipsoide.

Una vez estudiado esto, es evidente que al ser cortado cualquier elipsoide mediante un plano que pase por el centro y perpendicular al eje, la mitad del elipsoide es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje[22].

Sea, pues, un elipsoide y córtelo un plano que pase por su eje y resulte en su superficie la elipse ABΓΔ y sean los diámetros[23] de ésta AΓ, BΔ y su centro K, y sea en el elipsoide un círcu-
lo de diámetro BΔ perpendicular a AΓ, y considérese un cono 448
que tiene por base el círculo indicado y por vértice el punto A, y una vez trazada la superficie del cono, córtese éste mediante un plano paralelo a la base que pase por el punto Γ. Su sección

[21] *Med. círc.* 1.

[22] Es decir, «la misma altura».

[23] O «ejes».

será un círculo perpendicular a ΑΓ, y su diámetro será ΕΖ. Por otro lado, sea también un cilindro que tenga por base el mismo círculo cuyo diámetro es ΕΖ y por eje la recta ΑΓ y, una vez prolongada ΓΑ, sea ΑΘ igual a ella, y considérese ΘΓ una balanza y Α su punto medio, y trácese la recta ΜΝ paralela a ΕΖ en el paralelogramo ΛΖ, y por ΜΝ constrúyase un plano perpendicular a ΑΓ: éste producirá en el cilindro como sección un círculo cuyo diámetro será ΜΝ, en el elipsoide producirá como sección un círculo cuyo diámetro será ΞΟ y en el cono producirá como sección un círculo cuyo diámetro será ΠΡ[24].

Y puesto que ΓΑ es a ΑΣ como ΕΑ es a ΑΠ [*Elem.* VI 4], es decir, como ΜΣ a ΣΠ [*Elem.* V 18; VI 4] y, por otra parte, ΓΑ es igual a ΑΘ, entonces ΘΑ es a ΑΣ como ΜΣ es a ΣΠ. Y ΜΣ es a ΣΠ como el cuadrado de lado ΜΣ es al rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ.

Por otro lado, los cuadrados de ΠΣ, ΣΞ son iguales al rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ. Puesto que el rectángulo comprendido por ΑΣ, ΣΓ es al cuadrado de lado ΣΞ como el rectángulo comprendido por ΑΚ, ΚΓ —es decir, el cuadrado de lado ΑΚ— es al cuadrado de lado ΚΒ[25]; y por otro lado el cuadrado de lado ΑΚ es al cuadrado de lado ΚΒ como el cuadrado de lado ΑΣ es al cuadrado de lado ΣΠ [*Elem.* VI 4]; entonces, tomando la proporción en alternancia[26], el cuadrado de lado ΑΣ será al rectángulo comprendido por ΑΣΓ como el cuadrado de

[24] El plano indicado, como se ve en la figura, cortará a la recta ΑΓ en el punto Σ.

[25] [*Pues ambas razones son como la del eje mayor al eje menor*].

[26] *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 51.

lado ΠΣ al cuadrado de lado ΣΞ. Por otro lado, el cuadrado 450
de lado ΑΣ es al rectángulo comprendido por ΑΣΓ como el cuadrado de lado ΣΠ al rectángulo comprendido por ΣΠ, ΠΜ [*Elem.* VI 4]. Luego el rectángulo comprendido por ΜΠ, ΠΣ será igual al cuadrado de lado ΞΣ [*Elem.* V 9]. Súmese en común[27] el cuadrado de lado ΠΣ; entonces, el rectángulo comprendido por ΜΣ, ΣΠ será igual a la suma de los cuadrados de lados ΠΣ, ΣΞ [*Elem.* II 3]. Luego ΘΑ es a ΑΣ como el cuadrado de lado ΜΣ es a los cuadrados de lados ΠΣ, ΣΞ. Y el cuadrado de lado ΜΣ es a la suma de los cuadrados de lados ΣΞ, ΣΠ como el círculo que hay en el cilindro y cuyo diámetro es ΜΝ es a la suma de los dos círculos que tienen por diámetros ΞΟ, ΠΡ [*Elem.* XII 2]. De manera que el círculo que tiene por diámetro ΜΝ, si permanece en el lugar en que está, se equilibrará, respecto al punto Α, con la suma de los dos círculos cuyos diámetros son ΞΟ, ΠΡ, una vez trasladados y puestos en la balanza en el punto Θ, de manera que Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos. En efecto[28], una vez trasladados los dos círculos cuyos diámetros son ΞΟ, ΠΡ , el centro de gravedad de la suma de ambos es Θ [*Cf.* Lema 1]. Y, por tanto, ΘΑ es a ΑΣ como el círculo cuyo diámetro es ΜΝ es a la suma de los dos círculos cuyos diámetros son ΞΟ, ΠΡ.

De la misma manera se demostrará también que si en el paralelogramo ΛΖ se traza alguna otra paralela a ΕΖ y desde la recta trazada se construye un plano perpendicular a ΑΓ, el círculo resultante en el cilindro, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio respecto al punto Α con los dos círculos resultantes en el elipsoide y en el cono una vez trasladados al punto Θ de la balanza de modo que Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos.

Por consiguiente, una vez completados el cilindro y el elipsoide y el cono mediante los círculos tomados, el cilindro, si

[27] Es decir, «súmese a ambos términos de la igualdad».

[28] Sustituimos δέ del ms. por δή, siguiendo la conjetura de Heiberg.

permanece en el lugar en que está, estará en equilibrio, respecto
452 al punto A, con la suma del elipsoide y el cono una vez transportados y colocados en la balanza en el punto Θ, de tal manera que Θ sea el centro de gravedad de cada uno de ellos.

Y el punto K es el centro de gravedad del cilindro [Lema 8] y, como se ha dicho, el centro de gravedad del elipsoide y el cono juntos es el punto Θ. Por consiguiente, ΘA es a AK como el cilindro es a la suma del elipsoide y el cono; por otro lado, AΘ es el doble de AK; luego también el cilindro es el doble de la suma del elipsoide y el cono.

Luego el cilindro es igual a la suma de dos conos más dos elipsoides; y el cilindro es igual a la suma de esos mismos tres conos [*Elem.* XII 10]; luego tres conos son iguales a dos conos y dos elipsoides. Réstense en común[29] los dos conos. Entonces el cono restante, cuya sección por el eje da el triángulo AEZ, es igual a dos elipsoides; y ese mismo cono[30] es igual a ocho conos cuya sección por el eje da el triángulo ABΔ; luego los ocho conos indicados son iguales a dos elipsoides; luego también cuatro conos son iguales a un elipsoide.

Por tanto el elipsoide es el cuádruple del cono cuyo vértice es el punto A y su base el círculo de diámetro BΔ, que es perpendicular a AΓ; y la mitad del elipsoide es el doble del dicho cono.

Y por los puntos B, Δ trácense en el paralelogramo ΛZ las rectas ΦX, ΨΩ paralelas a AΓ y considérese un cilindro cuyas bases son los círculos que tienen por diámetros las rectas ΦΨ, XΩ y por eje la recta AΓ.

Puesto que el cilindro cuya sección por el eje da el paralelogramo ΦΩ es el doble del cilindro por cuyo eje pasa el paralelo-
454 gramo ΦΔ [*Elem.* XII 13] —ya que tienen iguales sus bases y un eje doble del otro eje— este mismo cilindro, cuya sección por el eje da el paralelogramo ΦΔ, será el triple del cono cuyo vértice

[29] Es decir, «réstense de los dos miembros de la igualdad».

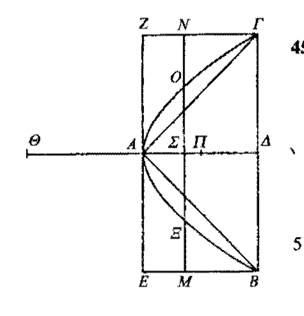
[30] El generado por el triángulo AEZ, se entiende.

es el punto A y su base el círculo de diámetro BΔ, que es perpendicular a AΓ [*Elem.* XII 10]; luego el cilindro cuya sección por el eje da el paralelogramo ΦΩ será el séxtuplo del cono indicado. Y se había demostrado que el elipsoide era el cuádruple del mismo cono; luego el cilindro es una vez y media el elipsoide.

Proposición 4

Que todo segmento cortado de un paraboloide de revolución mediante un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base y el mismo eje que el segmento, se estudia por este método así:

Sea un paraboloide de revolución y córtelo por el eje un plano y produzca como sección en la superficie [*Con. esf.* 11a] la sección de cono rectángulo ABΓ, y córtelo también otro plano perpendicular al eje y sea la sección común la recta BΓ; sea ΔA el eje del segmento y prolónguese ΔA hacia Θ y póngase AΘ igual a ella y considérese ΔΘ una balanza, y su punto medio A; y sea la base del segmento el círculo de diámetro BΓ, que es perpendicular a AΔ, y considérese el cono que tiene por base un círculo cuyo diámetro es BΓ y por vértice el punto A; sea, por otro lado, el cilindro que tiene por base el círculo cuyo diámetro es BΓ y por eje AΔ; y en el paralelogramo trácese MN que sea paralela a BΓ; y por MN constrúyase un plano perpendicular a AΔ; éste producirá en el cilindro como sección un círculo cuyo diámetro es MN, y en el segmento del paraboloide producirá como sección un círculo cuyo diámetro es ΞO [*Con. esf.* 11a]. 456



Y puesto que BAΓ es la sección de un cono rectángulo, AΔ es un diámetro, y puesto que ΞΣ, BΔ han sido trazadas ordena-

damente, ΔA es a AΣ como el cuadrado de lado BΔ al cuadrado de lado ΞΣ. Y ΔA es igual a AΘ. Luego ΘA es a AΣ como el cuadrado de lado MΣ es al cuadrado de lado ΣΞ[31]. Por otro lado, el cuadrado de lado MΣ es al cuadrado de lado ΣΞ como el círculo que está en el cilindro, cuyo diámetro es MN, es al círculo que está en el segmento del paraboloide, cuyo diámetro es ΞO [*Elem.* XII 2]. Luego ΘA es a AΣ como el círculo cuyo diámetro es MN es al círculo cuyo diámetro es ΞO. Luego el círculo cuyo diámetro es MN, el del cilindro, si permanece en el lugar en que está, estará en equilibrio, respecto al punto A, con el círculo cuyo diámetro es ΞO, una vez transportado éste y puesto en la balanza en el punto Θ, de modo que Θ sea su centro de gravedad; y el centro de gravedad del círculo cuyo diámetro es MN es Σ [Lema 7], mientras que el centro de gravedad del círculo cuyo diámetro es ΞO, una vez transportado, es Θ; y ΘA guarda con AΣ la razón inversa de la que guarda el círculo cuyo diámetro es MN con el círculo cuyo diámetro es ΞO[32].

De manera semejante se demostrará también que si en el paralelogramo EΓ se traza alguna otra paralela a BΓ y por la
458 recta trazada se construye un plano perpendicular a AΘ, el círculo resultante en el cilindro, si permanece en su mismo sitio, se equilibrará respecto al punto A con el resultante en el segmento del paraboloide una vez trasladado a la balanza al punto Θ, de manera que Θ sea su centro de gravedad.

Y así, una vez completados el cilindro y el segmento del paraboloide, el cilindro, si permanece en su mismo sitio, se equilibrará, respecto al punto A, con el segmento del paraboloide, una vez trasladado éste y puesto en la balanza en el punto Θ, de tal manera que Θ sea su centro de gravedad.

[31] En *Cuadr. paráb.* 3 aparece enunciado como proposición el argumento aquí empleado, pero para la demostración remite a los libros (perdidos) de *Cónicas*.

[32] Es decir, que los brazos de la palanca son inversamente proporcionales a los círculos situados en sus extremos.

Y puesto que las magnitudes mencionadas se equilibran respecto al punto A y el punto K es el centro de gravedad del cilindro, al estar cortada por la mitad AΔ en el punto K [Lema 8], y el centro de gravedad del segmento trasladado es Θ, la recta ΘA guardará con la AK la razón inversa de la que guarda el cilindro con el segmento. Y ΘA es el doble de AK; luego también el cilindro es el doble del segmento. Pero ese mismo cilindro es el triple del cono que tiene por base el círculo cuyo diámetro es BΓ y por vértice el punto A [*Elem.* XII 10].

Es evidente, por tanto, que el segmento es una vez y media el mismo cono.

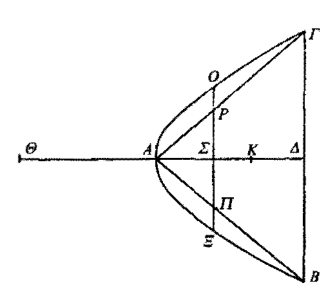
Proposición 5

Que en un segmento de un paraboloide de revolución, cortado por un plano perpendicular al eje, el centro de gravedad está sobre la recta que es el eje del segmento, si se corta dicha recta de manera que la parte que queda hacia el vértice sea el doble que la parte restante, se estudia por este método así:

Sea un segmento de un paraboloide de revolución cortado mediante un plano perpendicular al eje y córtelo por el eje otro plano y produzca como sección en la superficie la sección
ABΓ de un cono rectángulo [*Con. esf.* 11a], y sea BΓ la sec- **460**
ción común del plano que ha cortado el segmento y del que ahora lo corta; sea el eje del segmento y diámetro de la sección ABΓ la recta AΔ y, prolongada ΔA, póngase igual a ella la recta AΘ; considérese ΔΘ una balanza y A su punto medio, y sea también un cono inscrito en el segmento y sean sus generatrices BA, AΓ y trácese en la sección del cono rectángulo una recta ΞO paralela a BΓ y corte ésta[33] a la sección del cono rectángulo en los puntos Ξ, O y a las generatrices del cono en los puntos Π, P.

[33] Es decir, ΞO.

Puesto que en la sección del cono rectángulo las rectas ΞΣ, ΒΔ han sido trazadas perpendiculares al diámetro, entonces ΔΑ es a ΑΣ como el cuadrado de lado ΒΔ al cuadrado de lado ΞΣ [*Cuadr. paráb.* 3]. Por otro lado, ΔΑ es a ΑΣ como ΒΔ a ΠΣ [*Elem.* VI 4]; y ΒΔ es a ΠΣ como el cuadrado de lado ΒΔ es al rectángulo comprendido por ΒΔ, ΠΣ. Luego también el cuadrado de lado ΒΔ será al cuadrado de lado ΞΣ como el cuadrado de lado ΒΔ al rectángulo comprendido por ΒΔ, ΠΣ. Luego el cuadrado de lado ΞΣ es igual al rectángulo comprendido por ΒΔ, ΠΣ [*Elem.* V 9]. Luego las rectas ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ están en proporción[34] [*Elem.* VI 17], y por ello ΒΔ es a ΠΣ como el cuadrado de lado ΞΣ es al cuadrado de lado ΣΠ [*Elem.* V def. 9]. Por otro lado, ΒΔ es a ΠΣ como ΔΑ es a ΑΣ, es decir, como ΘΑ es a ΑΣ. Luego ΘΑ es a ΑΣ como el cuadrado de lado ΞΣ es al cuadrado de lado ΣΠ.



Constrúyase por ΞΟ un plano perpendicular a ΑΔ: éste producirá en el segmento del paraboloide de revolución un círculo cuyo diámetro será ΞΟ [*Con. esf.* 11a], y en el cono producirá un círculo cuyo diámetro será ΠΡ [*Elem.* XII 2]. Y puesto que ΘΑ es a ΑΣ como el cuadrado de lado ΞΣ es al cuadrado de lado ΣΠ y, por otro lado, el cuadrado de lado ΞΣ es al cuadrado de lado ΣΠ como el círculo cuyo diámetro es ΞΟ es al círculo cuyo diámetro es ΠΡ, entonces ΘΑ será a ΑΣ como el círcu-
462 lo cuyo diámetro es ΞΟ es al círculo cuyo diámetro es ΠΡ. Luego el círculo cuyo diámetro es ΞΟ, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio, respecto al punto A, con el círculo cuyo diámetro es ΠΡ, una vez trasladado éste al punto Θ de la balanza de manera que Θ sea su centro de gravedad.

[34] Entiéndase: «en proporción continua», es decir, ΒΔ : ΣΞ :: ΣΞ : ΣΠ.

Puesto que el centro de gravedad del círculo cuyo diámetro es ΞΟ, si permanece en su mismo sitio, es Σ, mientras que, como se ha dicho, el centro de gravedad del círculo cuyo diámetro es ΠΡ, una vez trasladado, es Θ, y puesto que ΘΑ guarda con ΑΣ una razón inversa de la que guarda el círculo cuyo diámetro es ΞΟ con el círculo cuyo diámetro es ΠΡ[35], entonces estarán en equilibrio respecto al punto A.

De la misma manera se demostrará también que si en la sección del cono rectángulo se traza alguna otra recta paralela a ΒΓ y por la recta trazada se construye un plano perpendicular a ΑΔ, el círculo resultante en el segmento del paraboloide, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio, respecto al punto A, con el círculo resultante en el cono, una vez trasladado y puesto en el punto Θ de la balanza, de manera que Θ sea su centro de gravedad.

Por consiguiente, una vez completados el segmento y el cono mediante los círculos, la suma de todos los círculos del segmento, si permanecen en su mismo sitio, estará en equilibrio, respecto al punto A, con la suma de todos los círculos del cono, una vez trasladados y puestos en el punto Θ de la balanza de manera que su centro de gravedad sea Θ.

Por consiguiente, también el segmento del paraboloide de revolución, si permanece en su mismo sitio, está en equilibrio respecto al punto A con el cono, trasladado y puesto en el punto Θ de la balanza de manera que su centro de gravedad sea Θ.

Puesto que el centro de gravedad de ambas magnitudes tomadas como una sola es A y puesto que el centro de gravedad del cono trasladado es Θ, entonces el centro de gravedad de la magnitud restante está sobre la recta ΑΘ prolongada hacia A y tomada de ella la recta AK de tal longitud que ΑΘ guarde con ella[36] la misma razón que guarda el segmento con el cono [Le- 464
ma 2]. Y el segmento es una vez y media el cono [Prop. 4]; luego

[35] *Cf.* n. 32.

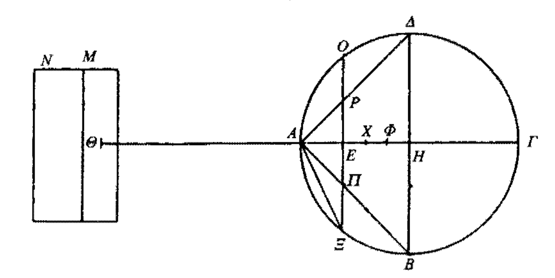
[36] Es decir, «con AK».

también ΘA es una vez y media AK y K es el centro de gravedad del paraboloide, una vez cortada AΔ de tal manera que la parte que tiene hacia el vértice del segmento sea el doble de la que está hacia la parte restante del segmento.

Proposición 6

En toda semiesfera el centro de gravedad está en la recta que es su eje, una vez cortada de tal manera que el segmento de la misma que está hacia la superficie de la semiesfera guarde con el segmento restante la razón de cinco a tres.

Sea una esfera y córtela un plano por el centro y resulte en la superficie el círculo ABΓΔ como sección; sean AΓ y BΔ diámetros del círculo perpendiculares entre sí; por BΔ constrúyase un plano perpendicular a AΓ; y sea un cono que tenga por base el círculo de diámetro BΔ y por vértice el punto A; sean BA, AΔ las generatrices del cono; y prolónguese ΓA y póngase AΘ igual a ΓA y considérese la recta ΘΓ una balanza y A su punto medio; y trácese en el semicírculo BAΔ la recta ΞO que sea paralela a BΔ; corte ésta al contorno del semicírculo en los pun-
466 tos Ξ, O; a las generatrices del cono en los puntos Π, P; a la recta AΓ en el punto E; y por la recta ΞO constrúyase un plano perpendicular a la recta AE. Este plano producirá como sección en la semiesfera un círculo cuyo diámetro será ΞO, y como sección en el cono un círculo cuyo diámetro será ΠP.



Y puesto que AΓ es a AE como el cuadrado de lado ΞA al cuadrado de lado AE [*Elem.* VI 31; VI 8, corol.; V def. 9], mientras que la suma de los cuadrados de lados AE, EΞ es igual al cuadrado de lado ΞA [*Elem.* I 47] y, por otra parte, EΠ es igual a AE [*Elem.* VI 4], entonces AΓ es a AE como la suma de los cuadrados de lados ΞE, EΠ al cuadrado de lado EΠ. Y la suma de los cuadrados de lados ΞE, EΠ es al cuadrado de lado EΠ como el círculo de diámetro ΞO más el círculo de diámetro ΠP al círculo de diámetro ΠP [*Elem.* XII 2], y ΓA es igual a AΘ. Luego ΘA es a AE como el círculo de diámetro ΞO más el círculo de diámetro ΠP al círculo de diámetro ΠP. Luego ambos círculos, los que tienen por diámetros ΞO, ΠP, si permanecen en su mismo lugar, estarán en equilibrio, respecto al punto A, con el círculo de diámetro ΠP, una vez trasladado y puesto en el punto Θ, de tal manera que Θ sea su centro de gravedad. Y puesto que E es el centro de gravedad de los dos círculos que tienen por diámetros ΞO, ΠP, si permanecen en su mismo sitio, [Lema 7], mientras que Θ lo es del círculo cuyo diámetro es ΠP, una vez trasladado, entonces EA es a AΘ como el círculo cuyo diámetro es ΠP es a la suma de los círculos cuyos diámetros son ΞO, ΠP.

De manera semejante también, si se traza en la semicircunferencia[37] otra paralela a BHΔ, y por la recta trazada se construye un plano perpendicular a AΓ, la suma de los dos círculos —el generado en la semiesfera y el del cono—, si permanecen en su mismo sitio, estará en equilibrio, respecto al punto A, con el círculo generado en el cono, una vez trasladado y puesto en el 468
punto Θ de la balanza.

Una vez completados la semiesfera y el cono mediante los círculos, todos los círculos de la semiesfera más los del cono, si

[37] En este pasaje, de lectura dudosa, Heiberg propone «sección del cono rectángulo» tanto en la edición griega como en la versión latina. Fue seguido en ello por Mugler en el texto griego y en su traducción; no obstante, corregimos el error, manifiesto, por sugerencia de M. Martínez —precedido por Ver Eecke (trad. cit., vol. II, pág. 498).

permanecen en su mismo sitio, estarán en equilibrio, respecto al punto A, con todos los círculos del cono, una vez trasladados y puestos en la balanza en el punto Θ, de tal manera que su centro de gravedad sea Θ. De manera que la semiesfera más el cono, si permanecen en su mismo sitio, estarán en equilibrio, respecto al punto A, con el cono, una vez trasladado y puesto en la balanza en el punto Θ, de tal manera que su centro de gravedad sea el punto Θ[38].

Sea el cilindro MN, colocado en Θ, igual al cono ABΔ y córtelo un plano perpendicular al eje de tal manera que el cilindro M esté en equilibrio, respecto al punto A, con el cono; entonces, la parte restante N estará en equilibrio con la semiesfera. Tómese entonces en la recta AH el punto Φ de tal manera que AΦ = 3 ΦH; entonces Φ será el centro de gravedad del cono [Lema 10].

Tómese, además, el punto X de manera que AH : AX = 8 : 5. Puesto que el cilindro M está en equilibrio, respecto al punto A, con el cono ABΔ, el cilindro M será al cono ABΔ como ΦA : ΘA, es decir, como 3 : 8. Y el cono ABΔ es igual al cilindro MN; luego el cilindro MN es al cilindro M como 8 : 3. Por consiguiente [Elem. *V 17*], *el cilindro N es al cilindro MN como 5 : 8; o el cono ABΔ es al cilindro N como 8 : 5, es decir, como AH : AX.* Y puesto que la esfera es cuatro veces mayor que el cono que tiene por base el círculo de diámetro BΔ y por eje AH [Prop. 2], *entonces la semiesfera será al cono ABΔ como 2 : 1, es decir, como AΘ : AH. Y entonces, ex aequali*[39], *la semiesfera será al cilindro N como AΘ : AX. Y el cilindro N, cuyo centro de gravedad es Θ, estará en equilibrio con la semiesfera respecto*

[38] El palimpsesto griego es lacunoso a partir de este punto y hasta el final de la proposición (la parte correspondiente a los fols. 170v col. 2; 163r col. 2 —donde se lee poco más de una decena de palabras—; 157r col. 1). Presentamos en cursiva la traducción de la reconstrucción sugerida por Heiberg a tenor de la prop. 9 (478, 23 y ss).

[39] Para la proporción *ex aequali (di' ísou)*, *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 52.

al punto A. Luego el centro de gravedad de la semiesfera es el punto X, que corta al eje de tal manera que la parte colocada hacia la superficie de la semiesfera guarda con la restante la razón de 5 : 3.

Proposición 7

Por este método se estudia también que todo casquete esfé- 26
rico guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje 470
que el casquete, la misma razón que guarda la suma del radio de la esfera más la altura del casquete restante con la altura del casquete restante[40].

Sea, pues, una esfera cuyo círculo máximo sea ABΓΔ y sean, por otra parte, diámetros perpendiculares entre sí AΓ, TY, y córtela un plano perpendicular a AΓ que produzca un casquete que tenga como base el círculo de diámetro BΔ, y corte BΔ a la recta AΓ en H y sobre ese círculo constrúyase un cono que tenga por vértice A. Además, constrúyase sobre el círculo de diámetro TY un cono que tenga el mismo vértice, y una vez trazada la superficie de éste, el plano trazado por BΔ produzca en el cono como sección un círculo de diámetro EZ; y en el mismo plano, con centro H y radio igual a la recta AΓ trácese un círculo de diámetro KΛ, y sobre él constrúyase un cilindro que tenga por eje AH, del cual sea ΦΛ el paralelogramo que lo atraviesa por el eje. Por otro lado, prolongada la recta AΓ por ambos extremos, sea ΓΩ igual al radio de la esfera y sea AΘ = AΓ, y

[40] El texto —ilegible— de 160v col. 2 y 157v col. 1 contenía la descripción de la construcción de la figura. Ofrecemos la versión propuesta por Heiberg siguiendo la pauta de Prop. 2 (438, 29 y ss). Nótese la anomalía de que en el diagrama se emplea la letra Φ dos veces, para designar dos puntos diferentes: el extremo inferior izquierdo del rectángulo de diámetro ΦΛ —que se usa solamente en la descripción de la construcción— y un punto de corte de la recta AH tal y como se describe en 472, 5-7 —al que se hace referencia a partir de ahí y hasta el final de la proposición.

considérese la recta ΓΘ una balanza y A su punto medio. En el paralelogramo ΦΛ trácese la recta MN paralela a la recta BΔ, y desde MN constrúyase un plano perpendicular a AΓ. Éste producirá en el cilindro como sección un círculo cuyo diámetro es MN, y en el casquete de la esfera producirá como sección un círculo cuyo diámetro es ΞO, y en el cono cuya base es el círculo de diámetro EZ y su vértice el punto A producirá un círculo cuyo diámetro es ΠP.

De manera semejante a lo anterior, se demostrará que el círculo cuyo diámetro es MN, si permanece en su mismo sitio, está en equilibrio, respecto al punto A, con la suma de los dos círculos de diámetros ΞO, ΠP, una vez transportados al punto Θ de la balanza, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea Θ. Y lo mismo con todos los círculos. Y una vez completa-
472 dos el cilindro y el cono y el casquete de la esfera mediante los círculos, el cilindro, si permanece en su mismo sitio, estará en equilibrio con la suma del cono más el casquete de la esfera, una vez trasladados y puestos en el punto Θ de la balanza.

Córtese la recta AH por los puntos Φ, X, de manera que AX sea igual a XH, y que HΦ sea la tercera parte de AH. Entonces X será el centro de gravedad del cilindro [Lema 8] por ser el punto medio del eje AH. Puesto que las magnitudes indicadas están en equilibrio respecto al punto A, el cilindro será a la suma del cono cuya base tiene por diámetro EZ más el casquete esférico BAΔ como ΘA es a AX. Y puesto que HA es el triple de HΦ, el rectángulo comprendido por ΓH, HΦ es la tercera parte del comprendido por AH, HΓ [*Elem.* VI 8, corol.; VI 17]. Pero el cuadrado de lado HB es igual al rectángulo comprendido por AH, HΓ [*Elem.* VI 8, corol.; VI 17]. Luego el rectángulo comprendido por ΓH, HΦ será también la tercera parte del cuadrado de lado BH. *Y* $AH^2 = 3\,AH \times H\Phi = 3\,AX \times A\Phi$, *puesto que* $AH : AX :: A\Phi : \Phi H = 2$. *Y puesto que* $\Theta A = KH$ *y* $AH = HE$, *entonces como* $\Theta A^2 : 1/3\,AH^2$, *así será el cilindro cuya base es* el círculo de diámetro KΛ al cono AEZ. Y el cuadrado de ΘA : $1/3\,AH^2 :: \Theta A^2 : AX \times A\Phi$; *por lo cual* $\Theta A^2 : AX \times A\Phi$ *como el cilindro al cono.* Se había demostrado también que ΘA es a AX como el cilindro cuya base es el círculo de diámetro KΛ es al casquete ABΔ de la esfera más el cono. Y $\Theta A = A\Gamma = A\Phi + \Phi\Gamma$; *por lo cual* $\Theta A^2 : A\Phi \times AX + \Phi\Gamma \times AX$ *como el cilindro es al casquete ABΔ más el cono AEZ. Por tanto, será* $\Theta A^2 : \Phi\Gamma \times AX$ *como el cilindro al casquete. Pero como* $\Theta A^2 : 1/3\,BH^2$, *así es el cilindro al cono ABΔ; y* $\Theta A^2 : 1/3\,BH^2 :: \Theta A^2 :: \Gamma H \times H\Phi$; *luego, como* $\Phi X \times AX :: \Gamma H \times H\Phi$ *así es el casquete ABΔ al cono ABΔ.*

Y puesto que $AH = 2AX = A\Phi + \Phi H = 3\,\Phi H$, *y* $\Phi\Gamma = \Phi H + H\Gamma = 1/3\,AH + H\Gamma$, *será* $\Phi\Gamma \times AX = 1/3AH \times 3/2\Phi H + H\Gamma \times 3/2\,\Phi H = \Phi H \times (1/2\,A\Gamma + H\Gamma) = \Phi H \times H\Omega$.

Luego como $H\Omega : H\Gamma$, *así es el segmento ABΔ al cono ABΔ.*

Proposición 8

De manera semejante se estudia también por este mismo método que todo segmento de elipsoide cortado mediante un plano perpendicular[41] guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje[42] la misma razón que guardan la suma de la mitad del eje del elipsoide más el eje del segmento opuesto con el eje del segmento opuesto. 474

[41] Perpendicular «al eje», se entiende.

[42] «Que el segmento», se entiende.

Proposición 9

El centro de gravedad de todo casquete esférico está sobre la recta que es el eje del casquete dividida de tal manera que la parte de ella que está hacia el vértice del casquete guarde con la parte restante la razón que guardan la suma del eje del casquete más el cuádruple del eje del casquete opuesto con la suma del eje del casquete más el doble del eje comprendido por el casquete opuesto[43].

Sea una esfera y mediante un plano perpendicular córtese de ella un casquete y, cortada la esfera por el centro mediante otro plano[44]*, sea el círculo ΑΒΓΔ su sección en la superficie* y sea la recta ΒΔ su sección en el plano que ha cortado el casque-
476 te; y sea la recta ΓΑ un diámetro perpendicular a ΒΔ y córtela en el punto Η, de modo que la recta ΑΗ será el eje del casquete cuyo vértice es el punto Α, y ΗΓ el eje del casquete opuesto. Córtese la recta ΑΗ en el punto Χ de manera que ΑΧ sea a ΧΗ como la suma de ΑΗ más el cuádruple de ΗΓ es a la suma de ΑΗ más el doble de ΗΓ.

Digo que Χ es el centro de gravedad del casquete cuyo vértice es el punto Α...[45].

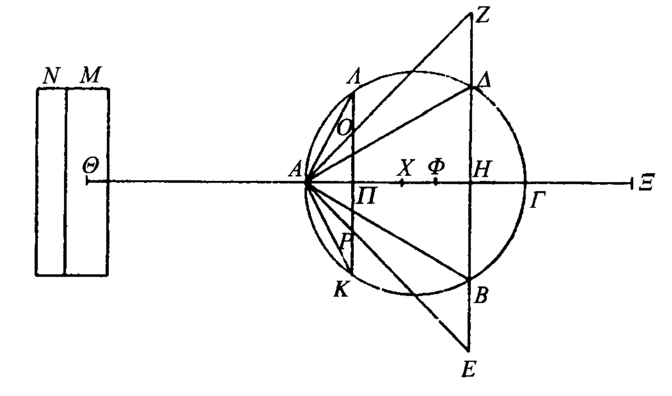
Y prolónguese ΑΓ y póngase ΑΘ igual a ella y sea ΓΞ igual al radio de la esfera y considérese ΓΘ una balanza y su punto medio Α; trácese también un círculo en el plano que cortó el casquete, con centro en Η y radio igual a ΑΗ, y sobre este círculo constrúyase un cono que tenga por vértice el punto Α, y sean ΑΕ, ΑΖ las generatrices del cono, y trácese ΚΛ paralela a ΕΖ y corte a la superficie del casquete en los puntos Κ, Λ; a las generatrices del cono ΑΕΖ en los puntos Ρ, Ο, y a la recta ΑΓ en el punto Π.

[43] La laguna que sigue ha sido suplida por Heiberg a tenor de Prop. 10 (482, 31 y ss.).

[44] Plano que ha de ser perpendicular al anterior.

[45] Sigue una laguna de aproximadamente 11 líneas en el palimpsesto; hasta ahora no ha sido posible colmarla.

Puesto que ΑΓ es a ΑΠ como el cuadrado de lado ΚΑ al cuadrado de lado ΑΠ [*Elem.* III 31; VI 8, corol.; V def. 9] y dado que la suma de los cuadrados de lados ΑΠ, ΠΚ es igual al cuadrado de lado ΚΑ [*Elem.* I 47] y el cuadrado de lado ΠΟ es igual al cuadrado de lado ΑΠ [*Elem.* VI 4], y puesto que también el cuadrado de lado ΕΗ es igual al cuadrado de lado ΑΗ, entonces también ΓΑ es a ΑΠ como la suma de los cuadrados de lados ΚΠ, ΠΟ al cuadrado de lado ΟΠ. Por otra parte, la suma de los cuadrados de lados ΚΠ, ΠΟ es al cuadrado de lado ΠΟ como la suma del círculo de diámetro ΚΛ más el círculo de diámetro ΟΡ al círculo de diámetro ΟΡ [*Elem.* XII 2], y ΓΑ es igual a ΑΘ. Luego ΘΑ es a ΑΠ como la suma del círculo de 478
diámetro ΚΛ más el círculo de diámetro ΟΡ es al círculo de diámetro ΟΡ.



Por consiguiente, puesto que la suma de los círculos de diámetros ΚΛ, ΟΡ es al círculo de diámetro ΟΡ como ΑΘ es a ΠΑ, trasládese el círculo de diámetro ΟΡ y póngase en el punto Θ de la balanza, de modo que Θ sea su centro de gravedad. Por tanto, ΘΑ es a ΑΠ como la suma del círculo de diámetro ΚΛ más el círculo de diámetro ΟΡ, si permanecen en su mismo sitio, al círculo de diámetro ΟΡ, una vez trasladado y puesto en el punto Θ de la balanza, de manera que Θ sea su centro de gravedad.

Entonces, los círculos —el del casquete BAΔ más el del cono AEZ— están en equilibrio, respecto al punto A, con el del cono AEZ. Y de manera semejante todos los círculos del casquete BAΔ y del cono AEZ, si permanecen en su mismo sitio, están en equilibrio respecto al punto A con todos los círculos del cono AEZ, una vez trasladados y colocados en el punto Θ de la balanza, de manera que Θ sea su centro de gravedad.

De modo que la suma del casquete esférico ABΔ más el cono AEZ, si permanecen en su mismo sitio, están en equilibrio, respecto al punto A, con el cono EAZ, una vez trasladado y puesto en el punto Θ de la balanza, de manera que Θ sea su centro de gravedad.

Sea el cilindro MN igual al cono que tiene por base el círculo de diámetro EZ y por vértice el punto A, y córtese la recta AH por el punto Φ de manera que AH sea el cuádruple de ΦH; entonces, el punto Φ es el centro de gravedad del cono EAZ —ya
480 lo escribimos antes [Lema 10]—. Y córtese el cilindro MN mediante un plano que lo corte perpendicularmente[46], de manera que el cilindro M esté en equilibrio con el cono EAZ.

Puesto que la suma del cono EAZ más el casquete ABΔ, si permanecen en su mismo sitio, están en equilibrio con el cono EAZ, una vez trasladado y puesto en el punto Θ de la balanza, de modo que Θ sea su centro de gravedad, y ya que el cilindro MN es igual al cono EAZ y cada uno de los cilindros M, N están puestos en el punto Θ y el cilindro MN está en equilibrio con ambos[47], también N estará en equilibrio, respecto al punto A, con el casquete esférico. Y el casquete esférico BAΔ es al cono cuya base es el círculo de diámetro BΔ y su vértice el punto A como la recta ΞH a HΓ —ya lo escribimos antes [Prop. 7]—. Y el cono BAΔ es al cono EAZ como el círculo de diámetro BΔ

[46] «Perpendicularmente al eje», se entiende.

[47] Es decir, con el casquete ABΔ y el cono AEZ mencionados en el párrafo anterior. Heiberg teme, no obstante, que se haya producido algún error bien en la transmisión del texto, bien en su propia lectura.

es al círculo de diámetro EZ [*Elem.* XII 11]; y el círculo es al círculo como el cuadrado de lado BH es al cuadrado de lado HE [*Elem.* XII 2]; y el rectángulo comprendido por ΓH, HA es igual al cuadrado de lado BH [*Elem.* III 31; VI 8, corol.], y el cuadrado de lado HA es igual al de lado HE; y el rectángulo comprendido por ΓH, HA es al cuadrado de lado HA como la recta ΓH es a HA. Luego el cono BAΔ es al cono EAZ como la recta ΓH a HA.

Y se había demostrado ya que el cono BAΔ es al casquete BAΔ como la recta ΓH a HΞ; luego, *ex aequali* el casquete BAΔ es al cono EAZ como la recta ΞH a HA. Y puesto que la recta AX es a XH como la suma de la recta HA más el cuádruple de HΓ es a la suma de AH más el doble de HΓ, tomando la proporción invertida [*Elem.* V 7, corol.] la recta HX será a XA como la suma del doble de la recta ΓH más la recta HA a la suma de la recta cuádruple de la recta ΓH más HA. Por composición [*Elem.* V 18], HA es a AX como la suma del séxtuplo de ΓH **482**
más el doble de HA es a la suma de HA más el cuádruple de HΓ. Y HΞ es la cuarta parte de la suma del séxtuplo de HΓ más el doble de HA, mientras que ΓΦ es la suma del cuádruple de HΓ más HA: esto es evidente[48]. Luego HA es a AX como ΞH es a ΓΦ [*Elem.* V 15]. De manera que también [*Elem.* V 16] ΞH es a HA como ΓΦ a XA. Y también se había demostrado que ΞH es a HA como el casquete cuyo vértice es el punto A y su base el círculo de diámetro BΔ es al cono cuyo vértice es el punto A y su base el círculo de diámetro EZ. Luego el casquete BAΔ es al cono EAZ como ΓΦ es a XA.

Y puesto que el cilindro M está en equilibrio, respecto al punto A, con el cono EAZ y el punto Θ es el centro de gravedad del cilindro, mientras que el punto Φ lo es del cilindro, entonces

[48] Heiberg explica la evidencia haciendo ver que 3/2 HΓ + 1/2 HA = HΓ + 1/2 (ΓH + HA) = HΓ + 1/2 AΓ = HΓ + ΓΞ; y HΓ + 1/4 HA = ΓH + HΦ; o, de otro modo: 2 AH + 6 AΓ = 2 AΓ + 4 ΓH = 4 ΓΞ + 4 ΓH = 4 HΞ; AH + 4 ΓH = 4 ΦH + 4 ΓH = 4 ΓΦ.

el cono EAZ es al cilindro M como ΘA es a AΦ —es decir, como ΓA a AΦ–. Y el cilindro MN es igual al cono EAZ. Luego, por descomposición[49] [*Elem.* V 17] el cilindro MN es al cilindro N como la recta AΓ a ΓΦ. Y el cilindro MN es igual al cono EAZ; luego el cono EAZ es al cilindro N como la recta ΓA es a ΓΦ —es decir, como ΘA a ΓΦ–. Y se había demostrado también que el casquete BAΔ es al cono EAZ como la recta ΓΦ a XA; luego, *ex aequali*, el casquete ABΔ será al cilindro N como la recta ΘA a AX. Y se había demostrado que el casquete BAΔ está en equilibrio[50], respecto al punto A, con el cilindro N, y el centro de gravedad del cilindro N es Θ. Luego el punto X es el centro de gravedad del casquete BAΔ[51].

Proposición 10

De manera semejante a esto se estudia también que el centro de gravedad de todo segmento de elipsoide de revolución está
484 sobre la recta que es el eje del segmento, dividida la recta de tal manera que la parte de ella que está hacia el vértice del segmento guarde con la parte restante la razón que guardan la suma del eje del segmento más el cuádruple del eje del segmento opuesto con la suma del eje del segmento más el doble del eje comprendido en el segmento opuesto.

Proposición 11

También se estudia por este método que todo segmento de un hiperboloide de revolución guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje que el segmento, la misma razón

[49] Para la descomposición de razones, *cf.* vol. I, Introducción, pág. 52.

[50] «Si permanece en su sitio», hay que entender.

[51] [*La figura*].

que guardan la suma del eje del segmento más el triple de la recta añadida al eje[52], con la suma del eje del segmento del hiperboloide más el doble de la recta añadida al eje; y que el centro de gravedad del hiperboloide <se encuentra[53]> sobre el eje, una vez cortado de tal manera que el segmento que está hacia el vértice guarde con el segmento restante la razón que guarda la suma del triple del eje más el óctuplo de la recta añadida con la suma del eje del mismo hiperboloide más el cuádruple de la recta añadida al mismo.

Y otras muchas más cosas... estudiadas... dejaremos de lado[54]..., puesto que el método ha sido ejemplificado mediante lo dicho anteriormente.

Proposición 12

Por este método se estudia que, si en un prisma recto que tiene cuadrados como bases se inscribe un cilindro con sus bases en los cuadrados opuestos y su superficie[55] tangente a las
cuatro caras[56] restantes, y por el centro del círculo que es la base 486
del cilindro y por un lado del cuadrado opuesto se traza un plano, la figura cortada[57] por el plano trazado es la sexta parte del prisma entero. Tras mostrarlo, volveremos atrás para la demostración geométrica.

Considérese un prisma recto que tenga por bases cuadrados y un cilindro inscrito en el prisma, según se ha dicho; una vez

[52] *Cf. Con. esf.* 25; la recta añadida (o «añadida al eje») es la que une el punto más elevado de la hipérbola con el punto de intersección de las asíntotas; *cf.* vol. I, Introducción, págs. 48-49.

[53] Así suple Heiberg en su versión latina la ausencia de verbo en el original.

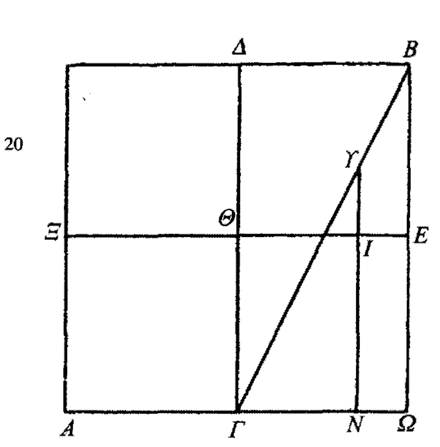
[54] Tomo la conjetura *perileípsomen* propuesta por Heiberg en lugar de la lectura *perilépsomen* del palimpsesto.

[55] «Superficie lateral», se entiende.

[56] [*Paralelogramos*].

[57] «Cortada del cilindro», se entiende.

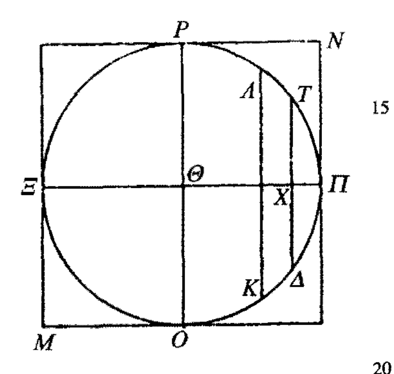
cortado el prisma por su eje mediante un plano perpendicular al plano que corta del cilindro el segmento, sea el paralelogramo AB la sección del prisma que contiene el cilindro y sea la recta ΒΓ la sección común al plano que ha cortado del cilindro el segmento y al plano trazado, a través del eje, perpendicular al plano que ha cortado del cilindro el segmento; y sea la recta ΓΔ el eje del prisma y del cilindro y córtela por la mitad y perpendicularmente la recta EZ, y por EZ constrúyase un plano perpendicular a ΓΔ.



Éste producirá como sección en el prisma un cuadrado y como sección en el cilindro un círculo. Sea el cuadrado MN la sección del prisma y el círculo ΞΟΠΡ la del cilindro; y sea el círculo tangente a los lados del cuadrado en los puntos Ξ, O, Π, P; y sea la recta ΚΛ la sección común al plano que ha cortado del cilindro el segmento y al plano trazado por EZ perpendicular al eje del cilindro. La recta ΠΘΞ[58] la corta por la mitad. Trácese en el semi-
488 círculo ΟΠΡ una recta ΣΤ perpendicular a ΠΧ y prolónguese el plano construido por ΣΤ perpendicular a ΞΠ por ambos lados del plano en que está el círculo ΞΟΠΡ. En el semicilindro cuya base es el semicírculo ΟΠΡ y su altura el eje del prisma producirá como sección un paralelogramo del cual un lado será igual a ΣΤ y el otro será igual a la generatriz del cilindro; y en el segmento cortado del cilindro producirá como sección también un paralelogramo, del cual un lado es igual a ΣΤ y el otro igual a

[58] El punto Θ designa el centro del círculo.

ΝΥ. Quede así trazada en el paralelogramo ΔΕ la recta ΝΥ, paralela a ΒΩ, de modo que corte la recta EI igual a la recta ΠΧ.



Y puesto que ΕΓ es un paralelogramo y NI es paralela a ΘΓ y ΕΘ, ΓΒ han sido trazadas pasando por ellas, ΕΘ es a ΘΙ como ΩΓ es a ΓΝ —es decir, como ΒΩ a ΥΝ [*Elem.* VI 4]—. Por otro lado, ΒΩ es a ΥΝ como el paralelogramo resultante en el semicilindro es al paralelogramo resultante en el segmento cortado del cilindro [*Elem.* VI 1] —pues ΣΤ es el mismo lado de ambos paralelogramos—. Y ΕΘ es igual a ΘΠ, e ΙΘ es igual a ΧΘ. Y puesto que ΠΘ es igual a ΘΞ, entonces ΘΞ es a ΘΧ como el paralelogramo resultante en el semicilindro al resultante en el segmento cortado del cilindro.

Considérese trasladado el paralelogramo que hay en el segmento y puesto en Ξ de manera que su centro de gravedad sea Ξ, y considérese además que ΠΞ es una balanza y que su punto medio es Θ. El paralelogramo del semicilindro, si permanece en su mismo lugar, estará en equilibrio, respecto al punto Θ, con el paralelogramo resultante en el segmento del cilindro, 490
una vez transportado y puesto en el punto Ξ de la balanza, de manera que el punto Ξ sea su centro de gravedad. Y puesto que X es el centro de gravedad del paralelogramo resultante en el semicilindro [Lema 6], mientras que Ξ es el centro de gravedad del paralelogramo resultante en el segmento cortado, una vez transportado, y dado que ΞΘ guarda con ΘΧ la misma razón que el paralelogramo cuyo centro de gravedad dijimos que era X con el paralelogramo cuyo centro de gravedad dijimos que era Ξ, entonces el paralelogramo cuyo centro de gravedad es X estará en equilibrio, respecto al punto Θ, con el paralelogramo cuyo centro de gravedad es Ξ.

De la misma manera se demostrará también que cuando en el semicírculo ΟΠΡ sea trazada otra recta perpendicular a ΠΘ, y desde la recta trazada se construya un plano perpendicular a ΠΘ y sea prolongado por ambos lados del plano en donde está el círculo ΞΟΠΡ, el paralelogramo producido en el semicilindro, si permanece en el lugar en que está, estará en equilibrio respecto al punto Θ con el paralelogramo producido en el segmento cortado del cilindro una vez transportado y puesto en la balanza en el punto Ξ de manera que su centro de gravedad sea el punto Ξ.

Y también, por tanto, todos los paralelogramos resultantes en el semicilindro, si permanecen en su mismo sitio, estarán en equilibrio, respecto al punto Θ, con todos los paralelogramos resultantes en el segmento cortado del cilindro, una vez transportados y puestos en la balanza en el punto Ξ.

De manera que el semicilindro, si permanece en su mismo
492 sitio, estará en equilibrio, respecto al punto Θ, con el segmento cortado[59], una vez transportado y puesto en la balanza en el punto Ξ, de manera que su centro de gravedad sea el punto Ξ.

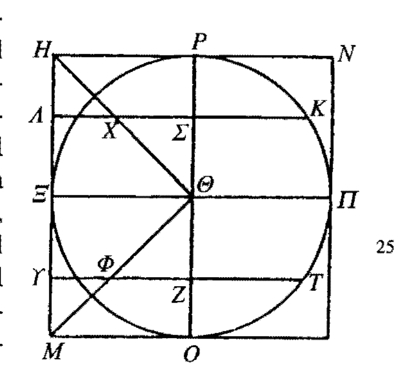
Proposición 13

Sean de nuevo el paralelogramo MN perpendicular al eje y el círculo ΞΟΠΡ[60], y trácense las rectas ΘΜ, ΘΗ y por ellas constrúyanse planos perpendiculares al plano en el que está semicírculo ΟΠΡ y prolónguense los dichos planos en ambos sentidos. Habrá un prisma que tendrá una base igual al triángulo ΘΜΗ y una altura igual al eje del cilindro; y este prisma es la cuarta parte del prisma entero que contiene al cilindro [*Elem.*

[59] «Cortado del cilindro», se entiende.

[60] Hace referencia al cuadrado y el círculo, resultantes de la sección del prisma y el cilindro, de la construcción descrita en la proposición 12 (486, 8-25).

XI 32]. Trácense unas rectas en el semicírculo ΟΠΡ y en el cuadrado MN, las rectas ΚΛ, ΤΥ equidistantes de la recta ΠΞ; éstas cortan a la semicircunferencia correspondiente al semicírculo ΟΠΡ en los puntos K,T; al diámetro ΟΡ, en los puntos Σ, Z y a las rectas ΘΗ, ΘΜ, en los puntos Φ, Χ[61]; y por las rectas ΚΛ, ΤΥ constrúyanse planos perpendiculares al diámetro ΟΡ y prolónguense por ambos lados del plano en el que está el círculo ΞΟΠΡ. El uno producirá como sección, en el semicilindro que tiene por base el semicírculo ΟΠΡ y por altura la misma que la del cilindro, un paralelogramo, un lado del cual es igual a la recta ΚΣ y el otro es igual al eje del cilindro, y en el prisma ΘΗΜ producirá, de manera semejante, un paralelogramo, un lado del cual será igual a la recta ΛΧ y el otro igual al eje[62]; por las mismas razones, en el mismo semicilindro habrá un paralelogramo, un lado del cual es igual a la
recta TZ y el otro igual al eje del cilindro, y en el prisma habrá **494**
un paralelogramo un lado del cual será igual a ΥΦ y el otro igual al eje del cilindro[63].



Por lo cual los centros de gravedad de los paralelogramos que están sobre ΣΚ, ΖΤ [64] *son los puntos medios de las rectas ΣΚ, ΖΤ* [*Lema 6*], *y el centro de gravedad de la suma de ambos paralelogramos es el punto A', en el cual la recta que une los*

[61] Como se ve en la figura —reconstruida por Heiberg, pues no aparece en el palimpsesto—, la recta ΚΛ corta a ΥΗ en el punto X y la ΤΥ corta a ΘΜ en el punto Φ.

[62] «Del cilindro», se entiende.

[63] Falta el resto de la proposición hasta el final; incluimos la reconstrucción publicada por Heiberg.

[64] Entiéndase: «de diagonales ΣΚ, ΖΤ».

centros de gravedad de los paralelogramos corta a la recta ΘΠ [Lema 3]. Por la misma razón, el centro de gravedad de los dos paralelogramos XΛ, ΥΦ es el punto B', en el cual la recta que une los puntos medios de las rectas XΛ, ΥΦ corta a la recta ΞΘ.

Entonces, (los paralelogramos que están sobre ΣK+ ZT): (paralelogramos que están sobre XΛ, ΥΦ) $= \Sigma K : \Lambda X$ [Elem. *VI 1]* $= \Sigma K : \Lambda X$ [Elem. *VI 1]* $= \Sigma K : \Sigma P$ [Elem. *VI 4; I 33]* $= \Sigma K^2 : \Sigma P \times \Sigma K$ [Elem. *V 15]* $= \Sigma P \times \Sigma O : \Sigma P \times \Sigma K$ [Elem. *III 31; VI 17; VI 8 corol.]* $= \Sigma O : \Sigma K = \Sigma P + 2\,\Sigma\Theta : \Sigma K = \Lambda X + 2\,X\Sigma : \Sigma K$ [Elem. *VI 4]* $= 1/2\,\Lambda X + X\Sigma : 1/2\,\Sigma K = B'\Theta : A'\Theta$.

Por tanto, esos paralelogramos están en equilibrio respecto al punto Θ.

Y lo mismo valdrá para todos los paralelogramos construidos de la misma manera; por lo cual, también el semicilindro y el prisma HΘM, una vez completados mediante esos paralelogramos, están en equilibrio respecto al punto Θ. Pero el semicilindro está en equilibrio, respecto al punto Θ, con el segmento de cilindro, colocado en Ξ [Prop. 12]; y ΘΞ =ΠΘ; por lo tanto, el segmento colocado en Π está en equilibrio con el prisma HΘM. Y el centro de gravedad del prisma está situado en la recta ΞΘ [*Lema 9*]*cortada de tal manera que la parte que está hacia Θ sea el doble de la restante [Lema 5]; luego el segmento del cilindro : prisma HΘM = 2/3 ΞΘ : ΠΘ = 2 : 3.*

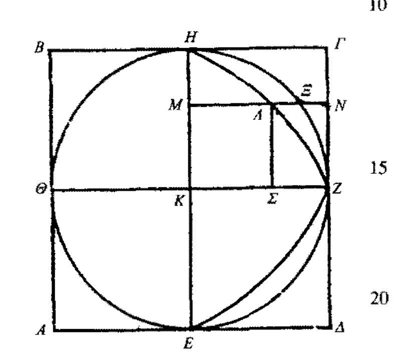
Y el prisma HΘM es la cuarta parte del prisma entero; luego el segmento del cilindro es su sexta parte.

Proposición 14[65]

Sea un prisma recto que tiene por bases cuadrados y sea una de sus bases el cuadrado ΑΒΓΔ, e inscríbase un cilindro en el

[65] Para la traducción del texto resultado de la nueva lectura del palimpsesto, *vid.* Apéndice.

prisma, y sea la base del cilindro el círculo EZHΘ tangente a los lados del cuadrado ΑΒΓΔ en los puntos E, Z, H, Θ, y por su centro y por un lado, el correspondiente a ΓΔ, del cuadrado situado en el plano opuesto a ΑΒΓΔ, trácese un plano. Éste cortará del prisma entero otro prisma que será la cuarta parte del prisma entero; éste estará comprendido él mismo por tres paralelogramos y dos triángulos opuestos entre sí. Trácese en el semicírculo EZH una sección de un cono rectángulo, y sea la recta ZK *la parte de diámetro comprendida* en la sección y trácese en el paralelogramo ΔH la recta MN que sea 496 paralela a KZ. Ésta cortará a la semicircunferencia en el punto Ξ, y a la sección del cono en el punto Λ.



Y el rectángulo comprendido por MNΛ es igual al cuadrado de lado NZ: eso es evidente[66]. Por eso MN será a NΛ como el cuadrado de lado KH al cuadrado de lado ΛΣ [*Elem.* VI 17; V def. 9].

Y por la recta MN constrúyase un plano perpendicular a EH. Este plano producirá como sección, en el prisma cortado del prisma entero, un triángulo rectángulo, del cual uno de los lados que forman el ángulo recto será MN; el otro[67] —en el plano construido a partir de ΓΔ, trazado perpendicular a ΓΔ desde N—, será igual al eje del cilindro; la hipotenusa estará en el propio plano secante. En el segmento cortado del cilindro por el plano trazado por la recta EH y el lado correspondiente a ΓΔ del cuadrado opuesto, producirá como sección también un triángulo rectángulo, del cual uno de los lados que forman el

[66] Apolonio, I 11.

[67] «El otro cateto», se entiende.

ángulo recto será MΞ; el otro —en la superficie del cilindro— será la recta trazada por Ξ perpendicular al plano KN; la hipotenusa estará en el plano que lo corta.

De manera semejante, puesto que el rectángulo comprendido por MN, MΛ es igual al cuadrado de lado MΞ —pues esto es evidente[68]— MN será a MΛ como el cuadrado de lado MN es al cuadrado de lado MΞ [*Elem.* VI 17; V def. 9]. Por otro lado, el cuadrado de lado MN es al cuadrado de lado MΞ como el triángulo sobre MN, el resultante en el prisma, es al triángulo sobre MΞ, el restado en el segmento por la superficie del cilindro [*Elem.* VI 19]; por tanto, MN es a MΛ como el triángulo es al triángulo.

De manera semejante demostraremos también que, si se traza alguna otra recta paralela a KZ en el paralelogramo circuns-
498 crito a la sección[69] y por la recta trazada se construye un plano perpendicular a EH, el triángulo producido en el prisma será *al triángulo producido en el* segmento quitado del cilindro como la recta trazada paralela a KZ en el paralelogramo ΔH a la recta limitada por la sección EHZ del cono rectángulo y el diámetro EH. Una vez completado el paralelogramo ΔH mediante las rectas trazadas paralelas a KZ y el segmento comprendido por la sección del cono rectángulo y el diámetro mediante las rectas tomadas en el segmento...[70]

... de las rectas trazadas paralelas a KZ en el paralelogramo ΔH; y todos los triángulos del prisma serán a todos los triángulos del segmento cortado del cilindro como todas las rectas del paralelogramo ΔH a todas las rectas situadas entre la sección del cono rectángulo y la recta EH.

Y el prisma está compuesto de los triángulos que hay en el

[68] Heiberg anota: Puesto que $M\Xi^2 = MH \times ME$ (*Elementos* III 31; VI 8, corolario; VI 17) $= HK^2 + MK^2$ (*Elementos* II 5) $= MN^2 + MN \times N\Lambda = MN \times (MN + N\Lambda)$.

[69] «A la sección de cono rectángulo», entiéndase.

[70] El fol. 105r, col. 1 (dieciséis líneas de texto del palimpsesto), resultó ilegible para Heiberg.

prisma, el segmento está compuesto de los triángulos del segmento cortado del cilindro, el paralelogramo ΔH está compuesto de las paralelas a KZ que hay en el paralelogramo ΔH, y el segmento[71] está compuesto de las rectas situadas entre la sección del cono rectángulo y la recta EH.

Luego el prisma es al segmento cortado del cilindro como el paralelogramo ΔH al segmento EZH comprendido por la sección del cono rectángulo y la recta EH. Y el paralelogramo ΔH es una vez y media el segmento comprendido por la sección del
cono rectángulo y la recta EH —eso ya está demostrado en lo 500
que dimos a conocer anteriormente[72]—, luego también el prisma es una vez y media el segmento cortado del cilindro. Luego el segmento del cilindro es a dos como el prisma a tres; y el prisma es a tres como el prisma entero, el que contiene al cilindro, es a doce —por ser el uno cuatro veces el otro—. Luego el segmento cortado del cilindro es a dos como el prisma entero a doce; de manera que el segmento cortado del cilindro es la sexta parte del prisma.

Proposición 15

Sea un prisma recto que tiene por bases cuadrados, de las cuales una sea el cuadrado ΑΒΓΔ, e inscríbase en el prisma un cilindro cuya base sea el círculo EZH. Éste es tangente a los lados del cuadrado en los puntos E, Z, H, Θ; sea su centro el punto K y por el diámetro EH y por un lado *del cuadrado opuesto, el correspondiente al lado* ΓΔ, trácese un plano. Este plano corta un prisma del prisma entero y del cilindro un segmento de cilindro.

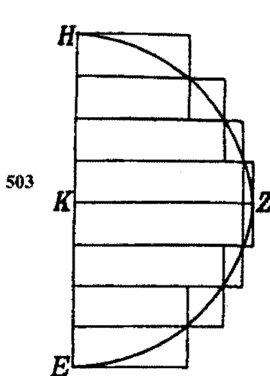
Digo que se demostrará que este segmento cortado del cilindro mediante el plano trazado es la sexta parte del prisma entero.

[71] [*De la parábola*].

[72] *Cuadr. paráb.* 24.

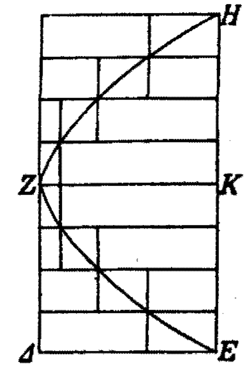
Demostraremos en primer lugar que es posible inscribir una figura sólida en el segmento cortado del cilindro y circunscribir otra compuesta por prismas que tengan la misma altura y que tengan como bases triángulos semejantes de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en un volumen menor que cualquier magnitud propuesta[73]...

502 *En el semicírculo EZH córtese repetidamente el diámetro EH en dos partes iguales y por los puntos de corte trácense en el semicírculo rectas secantes paralelas a la recta KZ y por los puntos en los que estas rectas cortan a la semicircunferencia trácense rectas paralelas a la recta EH y prolónguense hacia uno y otro lado hasta que corten a las dos rectas paralelas a la recta KZ y más próximas a ella; y constrúyanse, a partir de una y otra serie de paralelas, planos perpendiculares al plano del semicírculo; estos planos producirán, tanto en el interior como en el*
503 *exterior del cilindro, prismas que tienen igual altura y que tienen por bases triángulos rectángulos construidos sobre las rectas paralelas a la recta KZ. Y una vez cortada la recta EH en dos partes iguales sucesivamente hasta que los dos prismas situados junto a KZ sean menores que la magnitud dada, la figura sólida circunscrita al segmento de cilindro y compuesta por prismas excederá a la figura inscrita del mismo modo en un volumen menor que la magnitud dada; y la excederá precisamente en los dos prismas situados junto a KZ, puesto que a todos los restantes prismas de la figura circunscrita les corresponden otros tantos prismas iguales de la figura inscrita.*



[73] El texto que sigue es, en su mayor parte, ilegible. Imposible reconstruir el texto, Heiberg lo suple con un intento de reconstrucción de la demostración a tenor de *Con. esf.* 19 y 25.

Por otra parte, una vez trazada en el semicírculo la sección del cono rectángulo EZH y una vez trazadas y prolongadas las rectas paralelas a la recta EH por los puntos en los que la sección es cortada por las paralelas a la recta ZK, como antes dijimos, se producirá una figura circunscrita al segmento de la sección de cono rectángulo y otra inscrita, compuestas de paralelogramos ambas, de las cuales aquélla excede a ésta en los dos paralelogramos situados junto a ZK, y los paralelogramos, tomados de uno en uno, se corresponderán con cada uno de los prismas de las figuras sólidas a las que hicimos referencia.



Entonces, si el segmento cortado del cilindro no es igual a la sexta parte del prisma entero, es o mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

Entonces, el prisma cortado mediante el plano oblicuo es menor que una vez y media el segmento de cilindro.

En éste inscríbase una figura sólida y circunscríbase otra, como dijimos, de manera que la figura circunscrita exceda a la 505
inscrita en un volumen menor que el de cualquier magnitud dada.

Puesto que ya habíamos demostrado [*Prop. 14*] *que las rectas trazadas en el paralelogramo ΔH son a las rectas cortadas entre la sección del cono rectángulo y la recta EH como cada uno de los triángulos del prisma cortado mediante el plano oblicuo es a cada uno de los triángulos del segmento cortado del cilindro —es decir, como cada uno de los prismas del prisma cortado mediante el plano oblicuo a cada uno de los prismas de la figura sólida inscrita* [Elem. *XI 32*]*— menos dos, y también las rectas aquellas son entre sí como los paralelogramos en los que ha sido cortado el paralelogramo ΔH son a los paralelogramos de la figura inscrita en la sección de cono* [Elem. *VI 1*] *menos dos, entonces el prisma cortado mediante el plano obli-*

cuo será a la figura inscrita como el paralelogramo ΔH a la figura inscrita en la sección de cono. Y puesto que el prisma cortado mediante el plano oblicuo es menor que una vez y media el segmento de cilindro, el prisma este excede a la figura inscrita en un volumen menor que cualquier magnitud dada, y
504 el prisma cortado mediante el plano oblicuo será menor que una vez y media el sólido inscrito en el segmento cortado del cilindro. Pero se había demostrado que el prisma cortado por el plano oblicuo es al sólido inscrito en el segmento cortado del cilindro como el paralelogramo ΔH a los paralelogramos inscritos en el segmento comprendido por la sección de cono rectángulo y la recta EH.

Luego el paralelogramo ΔH es menor que una vez y media los paralelogramos que hay en el segmento comprendido por la sección del cono rectángulo y la recta EH. Lo cual es imposible, puesto que en otra parte[74] se ha demostrado que el paralelogramo ΔH es una vez y media el segmento comprendido por la sección del cono rectángulo y la recta EH.

Luego no es mayor *el segmento del cilindro que la sexta parte del prisma entero.*

Sea pues, si es posible, menor.

507 *Entonces, el prisma cortado por el plano oblicuo es mayor que una vez y media el segmento del cilindro.*

Sean, pues, de nuevo, una figura sólida inscrita y otra circunscrita del modo que dijimos, y demostraremos del mismo modo que cada uno de los prismas del prisma cortado mediante el plano oblicuo es a cada uno de los prismas de la figura circunscrita al segmento de cilindro, como cada uno de los paralelogramos comprendidos en el paralelogramo ΔH es a cada uno de los paralelogramos de la figura circunscrita al segmento comprendido por la sección del cono rectángulo y la recta
506 14 *EH. Por lo cual* [Lema 11] también todos los prismas que están en el prisma cortado mediante el plano oblicuo guardarán con todos los prismas que hay en la figura circunscrita al segmento de cilindro la misma razón que guarden todos los paralelogramos comprendidos en el paralelogramo ΔH con todos los paralelogramos que hay en la figura circunscrita al segmento comprendido por la sección de cono rectángulo y la recta EH; es decir, que el prisma cortado mediante el plano oblicuo guardará con la figura circunscrita al segmento de cilindro la misma razón que el paralelogramo ΔH con la figura circunscrita al segmento comprendido por la sección del cono rectángulo y la recta EH. Y el prisma cortado mediante el plano oblicuo es mayor que una vez y media la figura sólida circunscrita al segmento de cilindro.

Luego también el paralelogramo ΔH será mayor que una 507
vez y media la figura circunscrita al segmento comprendido por la sección de cono rectángulo y la recta EH. Lo cual es imposible, puesto que habíamos demostrado que el paralelogramo ΔH es una vez y media el segmento comprendido por la sección de cono rectángulo y la recta EH.

Luego el segmento de cilindro tampoco es menor que la sexta parte del prisma entero.

Y puesto que no es ni mayor ni menor, es igual a la sexta parte del prisma, como había que demostrar.

[74] *Cuadrat. paráb.* 24.

APÉNDICE

PROPOSICIÓN 14[75]

Sea un prisma recto que tenga por base un cuadrado, y sea 110r, 1
una de sus bases el cuadrado ΑΒΓΔ, e inscríbase en el prisma un cilindro, y sea la base del cilindro el círculo ΕΖΗΘ, tangente al cuadrado; y por el centro de éste y por el lado correspondiente a ΓΔ del cuadrado situado en el plano opuesto a ΑΒΓΔ constrúyase un plano. Éste cortará del prisma entero otro prisma, que será la cuarta parte del prisma entero. Este último estará comprendido por tres paralelogramos y dos triángulos opuestos entre sí. Trácese en el semicírculo ΕΖΗ una sección de cono
rectángulo: su diámetro será ΖΚ, y sea ΖΚ el parámetro[76], y en 105v, 1
el paralelogramo ΔΗ trácese una recta ΜΝ paralela a ΚΖ. Ésta cortará a la semicircunferencia en el punto Σ, y a la sección de cono en el punto Λ. Y el rectángulo comprendido por ΜΝΛ es igual al cuadrado de lado ΝΣ —pues esto es cosa cierta.

Por esta razón la recta ΜΝ será a ΝΛ como el cuadrado de

[75] La numeración marginal de referencia es la de los artículos citados en la Introducción a este tratado, n. 12 (pág. 271): las primeras tres cifras indican el número del folio en el palimpsesto; «r» y «v» indican si se trata de la cara anterior («recto») o posterior («verso») del folio; la cifra última, si es la primera o la segunda columna de las dos que contiene cada cara del folio.

[76] Literalmente «la ⟨recta⟩ a cuyo cuadrado equivalen las trazadas en la sección»; *cf.* vol. I, Introducción, pág. 47).

lado MN al cuadrado de lado NΣ. Y por MN constrúyase un plano perpendicular a EH. El plano producirá como sección en
110r, 2 el prisma cortado del prisma entero un triángulo rectángulo del cual uno de los lados que forman el ángulo recto será MN, el otro será la recta trazada perpendicular a ΓΔ en el plano construido desde M pasando por ΓΔ, igual al eje del cilindro, y la hipotenusa estará en el propio plano secante. Producirá[77] también como sección, en el segmento cortado del cilindro por el plano trazado por EH y por el lado del cuadrado opuesto a ΓΔ, un triángulo rectángulo, del cual uno de los lados que forman el ángulo recto será NΣ, el otro será la recta trazada en la superficie del cilindro desde el punto Σ perpendicular al plano ΔH, y la
105v, 2 hipotenusa estará en el plano secante, y los triángulos son semejantes.

Y puesto que el rectángulo comprendido por MN, NΛ es igual al cuadrado de lado NΣ —esto está claro, como se ha dicho—, la recta MN será a la NΛ como el cuadrado de lado MN al cuadrado de lado NΣ; y por otro lado el cuadrado de lado MN es al cuadrado de lado NΣ como el triángulo construido sobre MN —en el prisma entero cortado— al triángulo construido sobre NΣ —el que está en el segmento cortado, el restado del cilindro[78]—. Por tanto, MN es a NΛ como el triángulo es al triángulo.

De la misma manera se demostrará también que, si se traza cualquier otra recta paralela a KZ en el paralelogramo ΔH, y
110v, 1 por la recta trazada se construye un plano perpendicular a EH, el triángulo resultante en el prisma será al triángulo que está en el segmento cortado del cilindro como la recta trazada en el paralelogramo ΔH que sea paralela a KZ a la recta tomada de la sección HZ de cono rectángulo más el diámetro EH.

[77] Sobreentiéndase como sujeto «el plano construido pasando por MN y perpendicular a EH».

[78] Sustituyo la lectura conjetural y dudosa *tò apò... aphereménon* (líneas 10-11) por mi propia conjetura *tôi apò... aphereménoi*.

Una vez completado el paralelogramo ΔH mediante las rectas trazadas paralelas a KZ, y el segmento comprendido por la sección de cono rectángulo y el diámetro EH mediante las rectas tomadas en el segmento; completado también, por otro
lado, el prisma mediante los triángulos resultantes en él, y el 105r, 1
segmento cortado del cilindro[79], hay unas magnitudes iguales entre sí —los triángulos que hay en el prisma— y hay otras magnitudes —que son las rectas que son paralelas a ZKΘ en el paralelogramo ΔH—, las cuales son también iguales entre sí e iguales en número[80] a los triángulos que hay en el prisma. Y habrá otros triángulos —los que están en el segmento cortado— iguales en número[81] a los triángulos resultantes en el pris-
ma. Y unas rectas, tomadas de las trazadas paralelas a KZ entre 110v, 2
la sección del cono rectángulo y la recta EH, son iguales en número a las trazadas paralelas a KZ en el paralelogramo ΔH. Y todos los triángulos que están en el prisma son a todos los triángulos restados en el segmento cortado del cilindro como todas las rectas que están en el paralelogramo ΔH a todas las rectas que están entre la sección del cono rectángulo y la recta EH. Y el prisma está compuesto de los triángulos que hay en el prisma, y el segmento cortado[82] de los que están en el segmen-
to cortado del cilindro; y el paralelogramo ΔH, de las rectas 105r, 2
paralelas a KZ en el paralelogramo ΔH; y el segmento de parábola, de las rectas que están entre la sección de cono rectángulo y la recta EH.

Por tanto, el prisma es al segmento cortado del cilindro como el paralelogramo ΔH al segmento EZH comprendido por la sección de cono rectángulo y la recta EH. Y el parale-

[79] Sospecho que se han perdido algunas palabras del original, pues esperaríamos encontrar aquí la indicación de cuáles son las secciones que completan la figura, como en el resto del tratado.

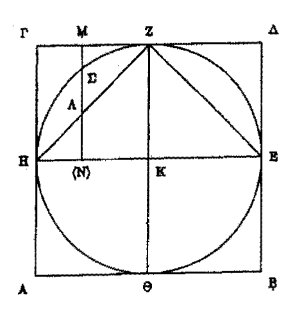
[80] La expresión «en número» es conjetura de los editores.

[81] La expresión «en número» es, de nuevo, conjetura de los editores.

[82] «Del cilindro», se entiende.

logramo ΔH es una vez y media el segmento comprendido de
158r, 1 esa manera por la sección de cono rectángulo y la recta EH. —Pues eso se ha demostrado en lo publicado antes.

Por tanto también el prisma es una vez y media el segmento cortado del cilindro. Por tanto, el segmento cortado del cilindro es a dos como el prisma es a tres; y el prisma es a tres como el prisma entero circunscrito al cilindro entero es a 12, por ser el uno 4 veces el otro. Luego el segmento cortado del cilindro es a dos como el prisma entero es a 12. De modo que el segmento cortado del cilindro entero es la sexta parte del prisma entero.



LIBRO DE LOS LEMAS

INTRODUCCIÓN

El *Libro de los lemas* ocupa un lugar particular dentro del corpus arquimedeo en el sentido de que es la única de las obras incluidas en el mismo para la que no disponemos en absoluto de texto griego. Lo conocemos gracias a una versión árabe, una traducción realizada por uno de los más destacados matemáticos árabes del siglo IX: Thabit ibn-Qurra (826-901). Este personaje, nacido en Harran (actualmente en Turquía), fue también estudioso de la astronomía y, además, fundó y dirigió en Bagdad una escuela de traductores del sirio y del griego[1]. A su traducción antepuso un prefacio que es la fuente más significativa en relación con esta obra. Según ese prefacio, la atribución a Arquímedes de la obra no vendría de la tradición, sino de un doctor Almochtasso, comentarista del libro, que es quien sostiene esa autoría y que alaba el libro porque sus proposiciones, «bellísimas», son «de máxima utilidad respecto a los principios de la geometría... que los profesores de esta elevadísima ciencia cuentan entre las cosas intermedias que conviene que se lean entre los *Elementos* de Euclides y el *Almagesto*». Entre los *Lemas*[2] Thabit ibn-Qurra encontró referencias a otros le-

[1] Entre sus traducciones —de obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Eutocio— se ha de destacar la de los libros V-VII de las *Cónicas*, única versión conservada de esa parte de la obra de Apolonio.

[2] En el sentido que los matemáticos griegos daban al término, el de proposición auxiliar necesaria para el desarrollo de otra proposición.

mas de los que se afirmaba que estaban incluidos en otras obras[3] y, naturalmente, da por sentado que se trata de obras de Arquímedes; pero ésta es la única fuente que menciona tales títulos. El traductor árabe cuenta también que Abusahal Alkuhi compuso un libro que tituló *Ordenación del libro de los lemas de Arquímedes*, y que él unió parte del comentario de Alkuhi a los pasajes oscuros. De todo este relato parece deducirse 1) que la atribución de esta obra a Arquímedes no está basada en la tradición, sino en la opinión de un personaje tenido por experto, 2) que el interés del tratado residía en su utilidad propedéutica, 3) que el autor del original sobre el que trabajó ibn-Qurra menciona como propias obras cuyos títulos no figuran entre los que la tradición atribuye a Arquímedes y 4) que, en una línea de actuación característica de los matemáticos árabes, ibn-Qurra enriqueció el texto donde consideró que era menester: datos todos ellos que nos llevan a rechazar la autoría de Arquímedes para este tratado.

Puede parecer sorprendente, entonces, que Heiberg lo incluyera en su edición, pero no lo es tanto si consideramos, primero, que se deben editar como obras de un autor aquellas que la tradición le atribuye, independientemente de que los estudios que se lleven a cabo sobre ellas puedan ponerlo en duda o, incluso, demostrar lo contrario[4]. En segundo lugar tenemos que el contenido matemático de la obra se ajusta bien, en general, a la tradición griega, y que en este libro se tratan las curvas denominadas arbelo y salino[5], cuya definición se atribuye de modo expreso a

[3] Así, cuando el autor se refiere a las «proposiciones sobre los rectángulos» (prop. 2), o a «nuestra exposición sobre los triángulos» (props. 5 y 6) o a «las proposiciones sobre los cuadriláteros» (prop. 12).

[4] Dicho de otro modo: no es admisible que cada crítico, fiándose de sus más recientes investigaciones, edite las obras bajo el nombre del autor que le parezca más oportuno.

[5] El nombre del arbelo (gr. *arbelós)* significa «cuchilla de zapatero» y se le aplicó por la semejanza de la figura con el utensilio, según un escolio a las *Theriaca* de Nicandro, 423. La definición se da en la prop. 4, y en las props. 5 y 6 se prueban sus propiedades fundamentales.

Arquímedes[6]. Ambas curvas pertenecen a un género de construcciones a base de semicírculos, emparentadas con las lúnulas de Hipócrates de Quíos, cuyo estudio tenía por finalidad alcanzar la medida el círculo. Y tanto el arbelo como el salino permiten la medida del círculo, aunque no su cuadratura[7]. Tenemos además el testimonio de Papo, que conocía el arbelo, al que se refiere como *archaía prótasis* («antiguo enunciado») y se ocupa de él en *Collectio Mathematica* IV 14 y ss. y IV 208 y ss. El tratamiento de esta materia en Papo es tan próximo al que encontramos en el *Libro de los lemas* que ha hecho pensar a los estudiosos que debió de haber una fuente común para ambos desarrollos, fuera un tratado del propio Arquímedes o, lo que es más probable teniendo en cuenta la forma que ofrece la versión de que disponemos, algún género de compilación posterior en la que se incluyeran partes de algún trabajo del siracusano.

El resto de las proposiciones, todas de geometría plana y carácter auxiliar, han sido repetidamente alabadas por su elegancia; el comentario más en pormenor de las mismas puede encontrarse en las notas de la traducción de Ver Eecke *(cf.* vol. I, Bibliografía).

El texto editado por Heiberg reproduce la traducción latina de Abraham Ecchellensis, editada por Borelli en Florencia, 1661[8].

La definición del salino (gr. *sálinon)* y su propiedad fundamental se tratan en la prop. 14. El significado y origen del nombre no están claros, como lo demuestra la variedad de teorías emitidas, ninguna de las cuales ha conseguido aquiescencia general: Cantor lo deriva del gr. *sálos* («línea de ondas»); Heath considera que es la forma helenizada de la palabra latina *salinum* («salero»), por su semejanza con dicho objeto; Heiberg pensó que podía derivar del gr. *sélinon* («apio») por su similitud con las frondas de esa planta.

[6] Para Cantor, seguido por Heath y Heiberg, también procede de Arquímedes la proposición 8, que resuelve la trisección del ángulo mediante *neûsis* (prop. 8; para las construcciones de *neûsis*, *cf.* vol. I, Introducción, págs. 41-42).

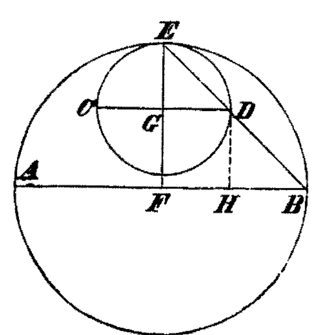
[7] La medida del círculo mediante estas curvas se prueba, respectivamente, en las props. 4 y 14.

[8] Había sido precedida poco antes por la edición de Foster (Londres 1659, con traducción de Gravii). El texto de la versión árabe se conserva en tres manuscritos de la Biblioteca Mediceo-Laurenciana de Florencia.

Proposición 1 II 510

Si dos círculos son tangentes entre sí, como los dos círculos AEB, CED en el punto E, y sus diámetros son paralelos, como lo son los dos diámetros AB, CD, y se unen los dos puntos B, D y el punto de tangencia E ⟨mediante las rectas⟩ DE, BD, la línea BE será recta.

Sean G, F los dos centros y trácese la recta GF y prolonguémosla hasta E [*Elem.* III 12] y tracemos DH paralela a GF. Y puesto que HF es igual a GD, y GD, EG son iguales, entonces de las rectas iguales FB, FE quedarán GF —es decir, DH— y HB, las cuales serán iguales, y los dos ángulos HDB, HBD, iguales. Y puesto que los dos ángulos EGD, EFB son rectos y los dos ángulos 511
EGD, DHB son iguales, quedarán dos ángulos GED, GDE, los cuales serán iguales entre sí y a los dos ángulos HDB, HBD; por tanto el ángulo EDG es igual al ángulo DBF. Y el ángulo comprendido por GDB es común; luego los dos ángulos GDB, FBD —que son iguales a dos rectos



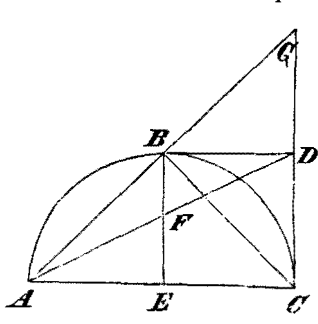
[*Elem.* I 29]— serán iguales a los dos ángulos GDB, GDE. Por
512 tanto, estos mismos son también iguales a dos rectos; luego la línea EDB es recta.

Y esto es lo que pretendíamos[1].

Proposición 2

Sea CBA un semicírculo al que sean tangentes DC, DB, y BE perpendicular a AC, y tracemos AD: BF será igual a FE.

Demostración: tracemos AB y prolonguémosla en línea recta y tracemos CD hasta que la[2] corte en G y tracemos CB.



Y puesto que el ángulo CBA está en el semicírculo, es recto [*Elem.* III 31], y el restante CBG es recto [*Elem.* I 13] y DBEC es un paralelogramo rectángulo[3]. Por tanto, en el triángulo rectángulo GBC se ha trazado BD perpendicular a la base en el punto B, y BD, DC serán iguales, puesto que son tangentes al círculo; luego CD también es igual a DG del modo que demostramos en las proposiciones que concluimos *Sobre los rectángulos*[4]. Y puesto que en el triángulo GAC la línea BE ha sido

[1] Papo asume el resultado de esta proposición en conexión con el arbelo y la demuestra para el caso de que los círculos sean tangentes externamente.

[2] «A la prolongación de AB», se entiende.

[3] No es necesario que las rectas BD, DC sean perpendiculares entre sí ni que BD sea paralela a AC ni DC paralela a BE. El error ha sido notado por traductores y comentaristas. La proposición, sin embargo, es verdadera, y fue demostrada por Torelli.

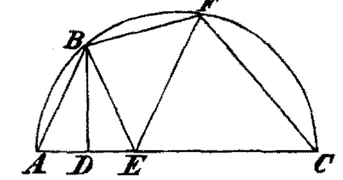
[4] Para el libro *Sobre los rectángulos*, *cf.* la Introducción a este tratado, pág. 324 y n. 3.

trazada paralela a la base y la línea DA ha sido trazada desde el punto medio D y cortando a la paralela en F, entonces BF será igual a FE.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 3 513

Sea CA un segmento de círculo y B un punto en él en cualquier parte, y BD una perpendicular a AC; y sea el segmento DE igual al DA y el arco BF igual al arco BA; en cualquier caso, CF será igual a CE[5].



Demostración: tracemos las líneas AB, BF, FE, EB. Y puesto que el arco BA es igual al arco BF, la ⟨cuerda⟩ AB será igual a la BF. Y puesto que AD es igual a ED y los dos ángulos D son rectos, y DB común, entonces AB es igual a BE [*Elem.* I 4]; además, BF, BE son iguales y los dos ángulos BFE, BEF son iguales. Y puesto que el cuadrilátero CFBA está en el círculo, el ángulo CFB más el ángulo CAB opuesto a él, más el ángulo BEA, son iguales a dos rectos [*Elem.* III 22]. Pero el ángulo CEB más el ángulo BEA son iguales a dos rectos; luego los dos ángulos CFB, CEB son iguales. Y quedan CFE, CEF iguales; luego CE es igual a CF.

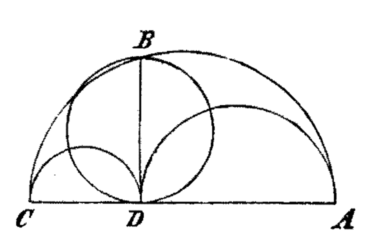
Y esto es lo que pretendíamos.

[5] La figura ABFC que ofrece el códice es un semicírculo, pero la afirmación es cierta respecto a cualquier arco de círculo. En Ptolomeo, *Almagesto* I 10, se considera esta misma proposición para el caso del semicírculo: el objetivo de Ptolomeo es conectar mediante una ecuación la longitud de la cuerda de un arco y de la cuerda del arco que sea la mitad de él.

Proposición 4

Sea ABC un semicírculo y estén sobre el diámetro AC dos semicírculos, de los cuales sea uno AD y otro DC, y sea DB una perpendicular; en cualquier caso, la figura resultante, a la que Arquímedes llama arbelo —es la superficie comprendida por el arco de un semicírculo mayor y las dos circunferencias de los semicírculos menores— es igual a un círculo cuyo diámetro es la perpendicular DB.

514 Demostración: puesto que la línea DB es media proporcional entre las dos líneas DA, DC [*Elem.* VI 13], habrá una figura plana, AD sobre DC[6], igual al cuadrado de lado DB [*Elem.* VI 17]. Y sumemos el rectángulo AD, DC con los dos cuadrados de lado AD, DC; sea el doble de la figura plana más los dos cuadrados AD, DC —es decir, el cuadrado de lado AC [*Elem.* II 4]— igual al doble del cuadrado DB más los dos cuadrados de lado AD, DC. Y la razón entre los círculos es la misma que la razón entre los cuadrados [*Elem.* XII 2][7]; luego el círculo cuyo diámetro es AC es igual al doble del círculo cuyo diámetro es DB más los dos círculos cuyos diámetros son AD, DC, y el semicírculo AC es igual al círculo cuyo diámetro es DB más los dos semicírculos AD, DC. Restemos en común[8] los dos semicírculos AD, DC; queda que la figura a la que contienen los semicírculos AC, AD, DC —y es la figura a la que Arquímedes llamaba arbelo— es igual al círculo cuyo diámetro es DB.



Y esto es lo que pretendíamos.

[6] Es decir, «el rectángulo AD, DC».

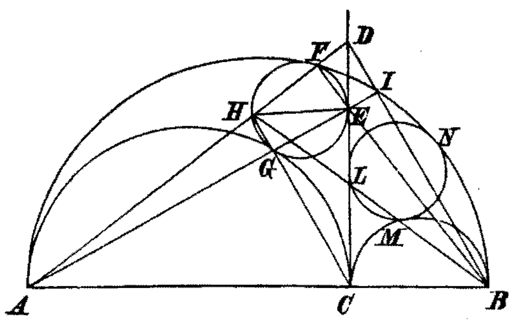
[7] Se entiende: «la misma que la de los cuadrados construidos sobre sus diámetros».

[8] Se entiende: «de ambas igualdades».

Proposición 5

Si hay un semicírculo AB y en cualquier parte en su diámetro está marcado un punto C y sobre el diámetro se construyen dos semicírculos AC, CB; y desde C se traza CD perpendicular a AB y, a uno y otro lado, se describen dos círculos tangentes a ella[9] y tangentes a los semicírculos, en cualquier caso aquellos dos círculos son iguales.

Demostración: dea uno de los círculos tangente a DC en E y al semicírculo AB en F y al semicírculo AC en G y tracemos el diámetro HE; será paralelo al diámetro AB, puesto que los dos ángulos HEC, ACE son rectos [*Elem.* I 28]. Y tracemos FH, HA; entonces la línea AF es recta, como se ha dicho en la proposición 1. Y AF, CE se cortan en D, puesto que parten de los ángulos A, C, menores que dos rectos [*Elem.* I, post. 5]. Y tracemos también FE, EB; entonces EFB también es recta, como 515
dijimos [Prop. 1], y es perpendicular a AD, puesto que el ángulo AFB es recto, porque está en el semicírculo AB [*Elem.* III 31]. Y tracemos HG, GC; también HC será una recta. Y tracemos EG, GA; EA será una recta; y prolonguémosla hasta I y



tracemos BI, la cual también será perpendicular a AI [*Elem.* III 31] y tracemos DI.

[9] Es decir, a CD.

Y puesto que AD, AB son dos rectas y desde D se ha trazado DC perpendicular a la línea AB, y desde B se ha trazado BF perpendicular a DA, las cuales se cortan mutuamente en E, y prolongada AE hasta I es perpendicular a BI, BID serán rectas[10], como demostramos en las proposiciones que concluimos en la exposición del tratado *Sobre triángulos rectángulos*[11]. Y puesto que los dos ángulos AGC, AIB son rectos, en cualquier caso
516 BD, CG son paralelas [*Elem.* I 28], y la proporción de AD a DH, que es como AC a HE, es como la proporción de AB a BC[12]; luego el rectángulo AC, CB es igual al rectángulo AB, HE [*Elem.* VI 16].

Y de modo semejante se demuestra, para el círculo LMN, que el rectángulo AC, CB es igual al rectángulo formado por AB y su diámetro; y a partir de ahí se demuestra también que los dos diámetros de los círculos EFG, LMN son iguales; luego los dos círculos son iguales.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 6

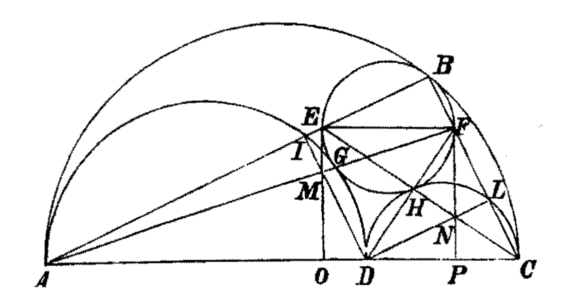
Si hay un semicírculo ABC y en su diámetro se toma un punto D, y AD fuera una vez y media DC, y sobre AD, DC se trazan dos semicírculos y entre los tres semicírculos se pone un círculo EF tangente a ellos y en él se traza el diámetro EF paralelo al diámetro AC, debemos hallar la razón entre el diámetro AC y el diámetro EF.

[10] Es decir, «BD, DI están en línea recta».

[11] En cuanto al libro *Sobre triángulos rectángulos*, *cf.* la Introducción a este tratado, pág. 324, n. 3. La demostración ofrecida la dio Almochtasso al probar que las alturas del triángulo acutángulo se cortan en el mismo punto.

[12] A partir de *Elem.* VI 2, por composición.

Tracemos pues dos líneas AE, EB, y dos líneas CF, FB; CB, AB serán rectas, como se ha dicho en la primera proposición. Tracemos además dos líneas FGA, EHC y se demostrará que también son rectas; de modo semejante, tracemos las dos lí- 517
neas DE, DF y tracemos DI, DL y EM, FN y prolonguémoslas hasta O, P.



Y puesto que, en el triángulo AED, AG es perpendicular a ED y DI también es perpendicular a AE, y ya se habían cortado mutuamente en M, entonces EMO será también perpendicular, como demostramos en la exposición que hicimos sobre las propiedades de los triángulos y cuya demostración precede en la proposición anterior; de modo semejante, también FP será perpendicular a CA. Y puesto que los dos ángulos de vértice en L y en B son rectos [*Elem.* III 31], DL será paralela a AB e, igualmente, DI a CB; por tanto la razón de AD a DC es como la razón de AM a FM [*Elem.* VI 2] —es decir, como la razón de AO a OP—, y la razón de CD a DA como la de CN a NE —es decir, como la razón de CP a PO—. Y AD era una vez y media DC; luego AO es una vez y media OP y OP una vez y media CP. Luego tres líneas, AO, OP, PC son proporcionales y en la misma medida en la que PC es cuatro, OP será seis y AO nueve, y CA diecinueve. Y puesto que PO es igual a EF, la proporción de AC a EF será la de diecinueve a seis.

Por tanto, hemos hallado la proporción requerida.

Y además, si la razón de AD a DC fuera cualquier otra,

como de cuatro a tres, o de cinco a cuatro, o alguna otra, se juzgará y razonará como se ha dicho.

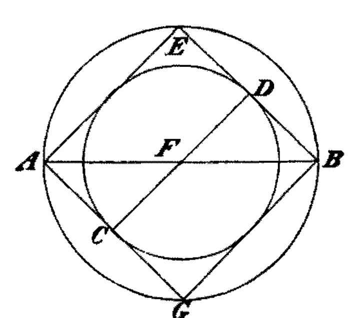
Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 7

Si se traza un círculo en torno a un cuadrado y otro dentro de él, en cualquier caso el circunscrito será el doble del inscrito.

Sea pues el círculo que comprende al cuadrado AB el círculo AB, y esté inscrito ⟨el círculo⟩ CD y sea AB el diámetro del cuadrado y también el diámetro del círculo circunscrito, y tracemos el diámetro CD del círculo inscrito paralelo a AE, la cual es igual a él.

518 Y puesto que el cuadrado AB es el doble del cuadrado AE [*Elem.* I 47] —o sea, del DC— y la razón entre los cuadrados construidos sobre los diámetros de los círculos es la misma razón que guarda el círculo con el círculo [*Elem.* XII 2], entonces el círculo AB es el doble del círculo CD.



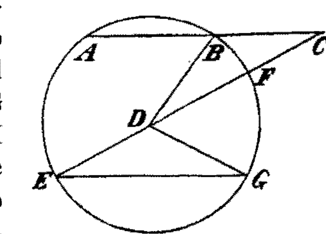
Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 8

Si en un círculo una línea AB parte de cualquier punto y es prolongada en línea recta y se le añade BC, igual a un semidiámetro del círculo, y desde C se traza una recta hasta el centro del círculo, que es D, y se prolonga hasta E, el arco AE será el triple del arco BF.

Tracemos pues EG paralela a AB y unamos DB, DG.

Y puesto que los dos ángulos DEG, DGE son iguales, el ángulo GDC será el doble del ángulo DEG [*Elem.* I 32]. Y puesto que el ángulo BDC es igual al ángulo BCD, y el ángulo CEG es igual al ángulo ACE [*Elem.* I 29], el ángulo GDC será el doble del ángulo CDB y el ángulo BDG entero será el triple del ángulo BDC, y el arco BG, igual al arco AE, será el triple del arco BF [*Elem.* III 26].

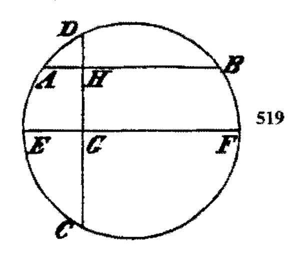


Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 9

Si dos líneas AB, CD se cortan mutuamente en el interior de un círculo, pero no en el centro, en ángulos rectos, en cualquier caso los dos arcos AD, CB son iguales a los dos arcos AC, DB.

Tracemos el diámetro EF paralelo a AB, de modo que corte en dos partes iguales a CD por el punto G; ⟨el arco⟩ EC será igual al ED [*Elem.* III 3]. Y puesto que tanto el arco EDF como el arco ECF son semicírculos y el arco ED es igual al arco EA más el arco AD, el arco CF más los 519 dos arcos EA, AD es igual a un semicírculo. Y el arco EA es igual al arco BF; luego el arco CB más el arco AD es igual a un semicírculo. Y quedan los dos arcos EC, EA —es decir, el arco AC— que, más el arco DB, son iguales a aquél.



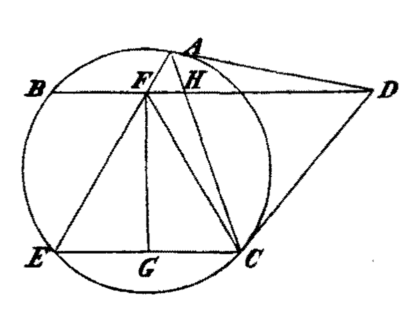
Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 10

Si hay un círculo ABC y ⟨una recta⟩ DA tangente a él y ⟨una recta⟩ DB secante a él y DC igualmente tangente, y se traza CE paralela a DB y se traza EA que corte a DB en F, y desde F se traza FG perpendicular a CE, en cualquier caso la cortará en dos partes iguales en G.

Tracemos AC.

Y puesto que DA es tangente y AC secante al círculo, el ángulo DAC será igual al ángulo inscrito en el segmento alterno AC —esto es, el ángulo AEC [*Elem.* III 32]— y es igual al ángulo AFD, puesto que CE, BD son paralelas [*Elem.* I 29]; luego los ángulos DAC, AFD son iguales. Y en los dos triángulos DAF, AHD hay dos ángulos AFD, HAD iguales y el ángulo D es común; por lo cual habrá un rectángulo FD, DH igual al cuadrado ⟨de lado⟩ DA



520 —es decir, al cuadrado ⟨de lado⟩ DC— y puesto que la razón de FD a DC es la misma que la de CD a DH [*Elem.* VI 17] y el ángulo D es común, los triángulos DFC, DCH serán semejantes [*Elem.* VI 6] y el ángulo DFC igual al DCH, el cual es igual al ángulo DAH. Y éste es igual al ángulo AFD; luego los dos ángulos AFD, CFD son iguales. Y DFC es igual al ángulo FCE [*Elem.* I 29]; y el ángulo DFA era igual al ángulo AEC; luego en el triángulo FEC[13] hay dos ángulos C, E, iguales, y dos ángulos ⟨de vértice en⟩ G rectos, y el lado GF es común; por lo cual CG será igual a GE [*Elem.* I 26]. Luego CE es cortada por la mitad en el punto G.

Y esto es lo que pretendíamos.

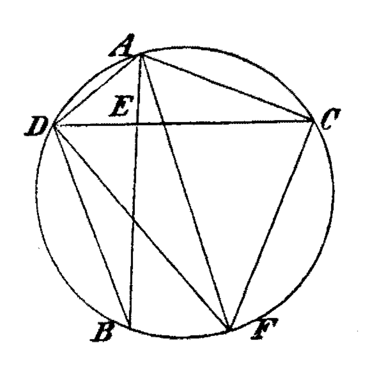
[13] *Sic.* Se refiere a los dos triángulos FEG, FCG.

Proposición 11

Si en un círculo dos rectas AB, CD se cortan mutuamente en ángulos rectos en el punto E —que no sea el centro—, en cualquier caso la suma de todos los cuadrados ⟨construidos sobre⟩ AE, BE, EC, ED es igual al cuadrado construido sobre el diámetro.

Tracemos el diámetro AF y tracemos las líneas AC, AD, CF, DB.

Y puesto que el ángulo AED es recto, será igual al ángulo ACF [*Elem.* III 31]. Y el ángulo ADC es igual al AFC, puesto que están sobre el arco AC [*Elem.* III 27]; y en los dos triángulos ADE, AFC quedan dos ángulos iguales CAF, DAE; y habrá igualmente dos arcos CF, DB iguales [*Elem.* III 26] —es decir, que sus dos cuerdas son iguales [*Elem.* III 29]—. Y los dos cuadrados de DE, EB ⟨sumados⟩ son iguales al cuadrado de BD [*Elem.* I 47] —es decir, al de CF—,



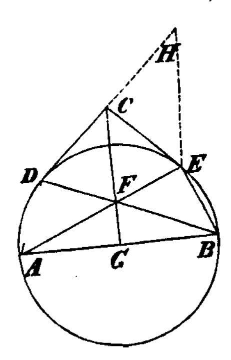
y los dos cuadrados de AE, EC ⟨sumados⟩ son iguales al cuadrado de CA y los dos cuadrados de CF, CA son iguales al cuadrado de FA, es decir, al cuadrado del diámetro; por tanto ⟨la suma de⟩ todos los cuadrados AE, EB, CE, ED es igual al cuadrado construido sobre el diámetro.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 12

Si hubiera un semicírculo de diámetro AB, y desde C se tra-
521 *zan dos líneas tangentes a él en los dos puntos D, E y se trazan EA, DB, que se corten mutuamente en F, y se traza CF y se prolonga hasta G, CG será perpendicular a AB.*

Tracemos DA, EB[14].



Y puesto que el ángulo BDA es recto [*Elem.* III 31], los dos ángulos restantes, DAB, DBA, del triángulo DAB serán iguales a un recto. Y el ángulo AEB es recto; por tanto son iguales a él. Y sumemos el ángulo FBE en común[15]; ⟨la suma de los⟩ dos ángulos DAB, ABE es igual a ⟨la suma de los ángulos⟩ FBE, FEB —es decir, al ángulo DFE externo al ⟨triángulo⟩ FBE [*Elem.* I 32]—. Y puesto que CD es tangente al círculo y DB secante a él, el ángulo CDB es igual al ángulo DAB e igualmente el ángulo CEF es igual al ángulo EBA [*Elem.* III 32]; luego los dos ángulos CEF, CDF ⟨sumados⟩ son iguales al DFE. Y esto es evidente a partir de nuestro tratado *Sobre las figuras cuadriláteras*, porque si entre dos líneas iguales que se cortan en un punto, como son las líneas CD, CE, se trazan dos líneas que se corten mutuamente, como son las dos líneas DF, EF y hay un ángulo contenido por ellas, como es el ángulo F, igual a los dos ángulos que se producen entre las dos líneas se cortan mutuamente, como son los dos ángulos E, D, a la vez habrá una línea que sale del

[14] En el diagrama que ofrece Heiberg aquí —al igual que en el que ofrece Mugler— no aparece la línea DA, ignoro si porque no figura tampoco en los mss. o por error tipográfico; sí aparece en el diagrama que acompaña a la versión de Heath.

[15] Es decir, «a los dos miembros de la igualdad».

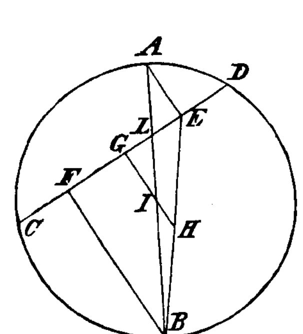
punto de encuentro hasta el punto de sección, como es la línea CF, igual a una y otra de las líneas que se encuentran, como CD
o CE; por tanto, CF será igual a CD; luego el ángulo CFD es 522
igual al ángulo CDF —es decir, al ángulo DAG—. Pero el ángulo CFD más el ángulo DFG es igual a dos rectos; luego el ángulo DAG más el ángulo DFG es igual a dos rectos; y quedan en el cuadrilátero ADFG dos ángulos, ADF, AGF, iguales a dos rectos. Pero el ángulo ADB es recto; luego el ángulo AGC es recto y CG perpendicular a AB.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 13

Si dos líneas AB, CD se cortan mutuamente en un círculo y AB es un diámetro del mismo pero CD, no, y desde los dos puntos A, B se trazan dos perpendiculares a CD —que sean AE, BF—, en cualquier caso cortarán de ella ⟨las rectas⟩ iguales CF, DE.

Tracemos EB y desde I, que es el centro, tracemos IG perpendicular a CD y prolonguémosla hasta H en la recta EB.

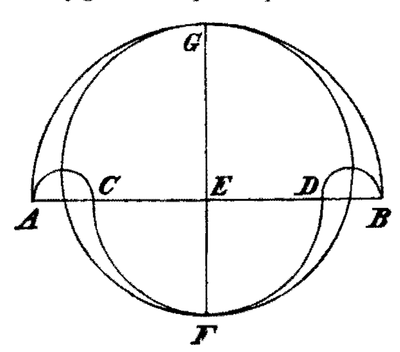


Y puesto que IG es una perpendicular a CD desde el centro, la corta por la mitad en G [*Elem.* III 3]; y puesto que IG, AE son dos perpendiculares a ella, serán paralelas [*Elem.* I 28], y puesto que BI es igual a IA, BH será igual a HE [*Elem.* VI 2]; y por causa de la igualdad de éstas y puesto que BF es paralela a HG, FG será igual a GE, y de las líneas iguales GC, GD quedan ⟨los segmentos⟩ iguales FC, ED.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 14

Si hay un semicírculo AB y de su diámetro AB se cortan líneas iguales AC, BD y sobre esas líneas se construyen los semi-
523 *círculos AC, CD, DB y el centro de los dos semicírculos AB, CD es el punto E, y EF es perpendicular a AB y se prolonga hasta G, el círculo de diámetro FG es igual a la superficie contenida por el semicírculo mayor y los dos semicírculos que están en su interior y el semicírculo de en medio que está fuera de él. Y ésta es la figura a la que Arquímedes llama el salino.*



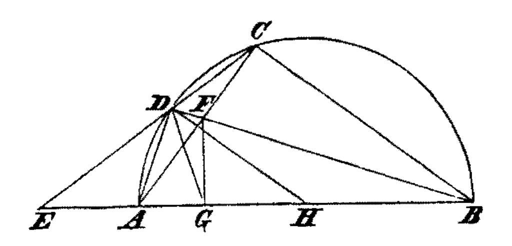
Puesto que DC está cortada por la mitad en E y se le ha añadido CA, ⟨la suma de⟩ los dos cuadrados de lados DA, CA será el doble de ⟨la de⟩ los dos cuadrados DE, EA [*Elem.* II 10]. Pero FG es igual a DA; luego ⟨la suma de⟩ los dos cuadrados FG, AC es el doble de ⟨la de⟩ los dos cuadrados DE, EA; y puesto que AB es el doble de AE y también CD el doble de ED, ⟨la suma de los⟩ dos cuadrados AB, DC será el cuádruple de ⟨la de⟩ los dos cuadrados DE, EA —es decir, el doble de ⟨la de⟩ los dos cuadrados GF, AC—. De modo semejante también los dos círculos de diámetros AB, DC son el doble de ⟨la suma de⟩ aquéllos cuyos diámetros son GF, AC; y la mitad de ⟨la suma de⟩ aquéllos cuyos diámetros son AB, CD es igual a ⟨la suma de⟩ los dos círculos de diámetros GF, AC. Pero el círculo de diámetro AC es igual a ⟨la suma de⟩ los dos semicírculos AC, BD; luego si de ellos quitamos los dos semicírculos AC, BD que son comunes, resulta que la figura contenida por los cuatro
524 semicírculos AB, CD, DB, AC —que es la que Arquímedes llama salino— es igual al círculo cuyo diámetro es FG.

Y esto es lo que pretendíamos.

Proposición 15

Si hay un semicírculo AB y AC es la cuerda de un pentágono y AD es la mitad del arco AC, trácese CD y prolónguese de modo que llegue a E y trácese DB, la cual corte a CA en F, y desde F trácese FG perpendicular a AB; la línea EG será igual al semidiámetro del círculo.

Tracemos pues la línea CB y sea H el centro, y tracemos HD, DG y AD.



Y puesto que el ángulo ABC, cuya base es el lado del pentágono[16], es dos quintas partes de un recto [*Elem.* III 20], cualquiera de los dos ángulos CBD, DBA es la quinta parte de un recto. Y el ángulo DHA es el doble del ángulo DBH [*Elem.* III 20]; luego el ángulo DHA es dos quintas partes de un recto. Y puesto que en los dos triángulos CBF, GBF los dos ángulos B son iguales y G, C son rectos y el lado FB es común, BC será igual a BG [*Elem.* I 26]. Y puesto que en los dos triángulos CBD, GBD dos lados CB, BG son iguales y, de modo semejante, los ángulos de vértice en B ⟨son iguales⟩ y el lado BD es común, los dos ángulos BCD, BGD serán iguales [*Elem.* I 4]. Y cualquiera de ellos es seis quintas partes de un recto[17] y es igual

[16] Entiéndase: «una cuerda igual al lado del pentágono regular inscrito en el círculo».

[17] Puesto que DCA = 1/2 DHA [*Elem.* III 20] y FCB = 90°.

al ángulo DAE externo del cuadrilátero BADC, que está en el
525 círculo[18]; luego resulta que el ángulo DAB es igual al ángulo DGA, y DA será igual a DG. Y puesto que el ángulo DHG es dos quintas partes de un recto y el ángulo DGH seis quintas partes de un recto, queda que el ángulo HDG es dos quintas partes de un recto, y DG será igual a GH. Y puesto que ADE es externo al cuadrilátero ADCB, que está en el círculo[19], es igual al ángulo CBA, y es dos quintas partes de un recto e igual al ángulo GDH. Y puesto que en dos triángulos EDA, HDG hay dos ángulos EDA, HDG iguales y lo mismo los dos ángulos DGH, DAE y los dos lados DA, DG, ⟨entonces⟩ EA será igual a HG [*Elem.* I 26]. Y sumemos AG en común[20]; EG será igual a AH.

Y esto es lo que pretendíamos.

Y a partir de ello queda de manifiesto que la línea DE es igual al semidiámetro del círculo, porque el ángulo A es igual al ángulo DGH y, por tanto, la línea DH será igual a la línea DE. Y afirmo que EC queda dividida en extrema y media razón en el punto D, y que el segmento mayor es DE[21]; y esto porque ED es una cuerda de hexágono [*Elem.* IV 15, corol.] y DC, la del decágono, y esto ya está demostrado en el libro de los *Elementos*[22].

Y esto es lo que pretendíamos.

[18] Es decir, «que puede ser inscrito en el círculo».

[19] Como antes, entiéndase «que puede ser inscrito en el círculo».

[20] Es decir, «a los dos miembros de la igualdad».

[21] Es decir, que CD : DE :: DE : EC.

[22] *Elem.* XIII 9.

PROBLEMA DE LOS BUEYES

INTRODUCCIÓN

El *Problema de los bueyes* está formado por veintidós dísticos elegíacos que transforman en problema matemático el pasaje homérico de *Odisea* XII, 260 y ss.: «Luego, cuando hubimos escapado de la terrible Caribdis y de Escila, pronto llegamos a una isla espléndida. Allí estaban las vacas de amplia testuz y los gruesos y muchos rebaños de Helios Hiperión»[1]. En los manuscritos[2] su texto va precedido de un epígrafe del que obtenemos la mayor parte de los datos conocidos sobre el poema.

De acuerdo con él, el epigrama contiene un problema que Arquímedes envió a sus colegas alejandrinos en una carta a Eratóstenes. Este erudito alejandrino (Cirene 276-Alejandría *circa* 195) es el único de los corresponsales de Arquímedes sobre el que estamos relativamente bien informados: geógrafo y astrónomo —es famosa su medida de la circunferencia de la Tierra—, erudito y filólogo —dirigió la Biblioteca de Alejandría aproximadamente desde 235 a.C. hasta su muerte— fue también un matemático no despreciable, al que debemos la «criba de Eratóstenes» y una resolución del «problema délico»[3].

---

[1] Trad. de C. García Gual, Madrid, 2004.

[2] De transmisión independiente del resto de las obras de Arquímedes, esta obra se nos ha conservado en el *Gudianus Graecus* 77 (siglo xv, siglado G) y el *Parisinus graecus* 2448 (siglo xiv, siglado P).

[3] La criba de Eratóstenes es un método para hallar números primos: una vez escrita la sucesión de los números naturales, se van tachando cada segundo

Arquímedes debió de apreciar sus conocimientos en este terreno, pues le hizo destinatario no sólo de este *Problema*, sino también de su famoso *Método*[4].

La cuestión que propone el poema es la de averiguar el número de reses que componían los ganados del Sol. El problema está planteado en dos partes bien diferenciadas mediante una doble apelación al lector, contenidas respectivamente en los versos 1-30 y 31-44. La primera parte pide determinar por separado el número de los toros y vacas blancos, negros, rubios y a manchas que componen los ganados del Sol, dadas determinadas condiciones de conmensurabilidad entre las cifras correspondientes: un sistema de siete ecuaciones lineales y ocho incógnitas cuya resolución permitiría a quien la resolviera «no ser llamado ignorante ni inexperto en números». Si llamamos respectivamente B, N, R, P a los toros, blancos negros, rubios y pintos y b, n, r, p a las vacas de esos mismos pelajes, las ecuaciones se plantean como sigue:

(1) $B = (1/2 + 1/3)\,N + R$
(2) $N = (1/4 + 1/5)\,P + R$
(3) $P = (1/6 + 1/7)\,B + R$
(4) $b = (1/3 + 1/4)\,(N + n)$
(5) $n = (1/4 + 1/5)\,(P + p)$

número a partir del 2, cada tercero a partir del 3, cada cuarto a partir del 4, y así sucesivamente. Si se quiere llegar a obtener la lista de los primos hasta *n*, es preciso continuar la operación hasta que se llega a un número cuyo cuadrado es superior a *n*. El método fue descrito por Nicómaco de Gerasa, *Introductio Arithmetica* I 13, 2-4.

Su solución al problema délico nos ha sido transmitida por EUTOCIO —*Comentarios*, 88, 4 y ss. (ed. Heiberg), *cf.* vol. I, págs. 378-383— junto con el epigrama, dedicado a Ptolomeo III Evergetes y a su hijo, en el que refuta las soluciones anteriores.

[4] La variedad de sus inquietudes intelectuales hizo que recibiera el mote de *péntahtlos*; a pesar de destacar en todos los campos de su actividad, no llegó a ser el mejor en ninguna: de ahí que su segundo apodo fuera *Bêta* («el segundo»).

(6) $p = (1/5 + 1/6)\,(R + r)$
(7) $r = (1/6 + 1/7)\,(B + b)$

En la segunda parte se añaden dos condiciones, que convierten la cuestión en un problema de análisis indeterminado: la suma del número de toros blancos y negros ha de ser un número cuadrado y la de los rubios y a manchas, un número triangular; es decir, se cumple que

(8) $B + N = x^2$
(9) $R + P = y\,(y + 1) : 2$

Si el lector consiguiera también resolver esta parte, podría «jactarse de ser portador de la victoria y ser plenamente tenido por fecundo en esta sabiduría».

El poema va acompañado de un escolio que, sin indicación del método empleado ni de los cálculos efectuados, ofrece una solución incompleta del problema: en él se nos dan las cifras de vacas y toros de cada uno de los cuatro pelajes y el escoliasta concluye afirmando escuetamente que con esos números también se cumplen las condiciones propuestas en la segunda parte, pero no es cierto que se obtengan el número cuadrado y el triangular requeridos.

A pesar del epígrafe que precede al poema y de que un escolio a Platón[5] menciona ya un «problema de los bueyes de Arquímedes», la autenticidad de la autoría ha sido repetidamente puesta en duda[6], en parte por razones lingüísticas (el uso del dialecto jonio y la forma versificada) y en parte por razones matemáticas (la sencillez relativa de resolución de la primera parte del proble-

[5] Escolio a PLATÓN, *Cármides* (91, ed. RUNK).

[6] Para un resumen de la cuestión de la autoría hasta finales del siglo XIX puede verse KRUMBIEGEL-AMTHOR, «Das Problema bovinum des Archimedes», *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Historische-Litterarische Abteilung)* 25 (1880) 121-136 y 156 y ss.

ma frente a la notable dificultad de la segunda). Se plantean, pues, dos cuestiones de autenticidad: la del poema y la del problema.

Algunos autores, como Hesselmann, Heiberg y Krumbiegel, se manifiestan a favor de la autoría de Arquímedes tanto para el poema como para el problema. En apoyo de la autenticidad del problema aducen el testimonio inequívoco del mencionado escolio a Platón; para sustentar la del poema, Heiberg responde a la objeción de la forma versificada invocando los paralelismos de otros matemáticos antiguos que también presentaron sus problemas en verso —así el ya mencionado epigrama de Eratóstenes con la solución al problema délico y el conocido epigrama de Diofanto (*Arithmetica* V 33)[7]— y argumentando que el uso del dialecto jónico queda justificado en razón de que es el tradicional en esta clase de composiciones. Que el problema se nos presente como dirigido a Eratóstenes, cuya correspondencia con Arquímedes es un dato probado, es hoy otro argumento en favor de su origen arquimedeo.

Los argumentos de Heiberg en cuanto a la composición del poema están fundamentados, pero no son conclusivos: no podemos dejar de tener en cuenta el irrefutable testimonio de Eutocio, que afirma de forma tajante que las obras de Arquímedes estaban escritas en el dialecto dorio propio de Siracusa[8]. Tampoco es de despreciar el dato de que, con las excepciones mencionadas de Eratóstenes y Diofanto, la mayor parte de los epigramas de tema matemático plantean cuestiones que no pasan de ser problemas elementales próximos a la categoría de «pasatiempos» y son, en general, bastante posteriores a Arquímedes. En consecuencia, debemos seguir considerando razonable la duda sobre la autoría de Arquímedes respecto a la composición del poema.

[7] Para el epigrama de Eratóstenes, *cf.* ARQUÍMEDES, *Tratados*, vol. I, págs. 378-383 y, en ese mismo vol., Introducción, págs. 80-85; para el de Diofanto, *vid.* BACHET, *Comm. a Dioph. Arithm., loc. cit.* Para la consideración de otros epigramas de tema matemático, tenidos generalmente por menos significativos a este respecto, *vid.* HEATH, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, págs. 441-442 y KRUMBIEGEL, art. cit.

[8] EUTOCIO, *Com. al Libro II de Sobre la esfera y el cilindro*, 132, 6-7 (*cf.* vol. I, pág. 392).

En el aspecto matemático, se había objetado que la resolución del problema exigía el manejo de cifras tan elevadas y un conocimiento tal de los números poligonales que no podían estar al alcance de Arquímedes. Heiberg responde a la primera objeción aduciendo que el sistema de notación numérica ideado por Arquímedes, del que tenemos testimonio en el *Arenario*, anulaba la primera de estas dificultades, y a la segunda, recordando que el tratamiento minucioso de los números poligonales que hace Nicómaco de Gerasa en sus *Arithmetica*, conocimiento que sin duda hunde sus raíces en fechas notablemente más antiguas, ponía al siracusano en situación de resolver las dos últimas cuestiones planteadas en el *Problema*.

A estos argumentos hay que añadir que la determinación del número de toros y vacas de cada pelaje, es decir, la resolución de la primera parte, pertenece a un tipo de problema, de origen egipcio, clásico en la matemática griega elemental y testimoniado ya en Platón (*Leyes* 819a-c)[9]; en ese sentido, el *Problema de los bueyes* encaja bien en la tradición. Por otro lado, la dificultad de esta parte no va más allá del hecho de ser un sistema de ecuaciones algo más largo de lo habitual, y el manejo de las cifras resultantes en esta primera parte no es mucho más complejo que los cálculos que requiere la determinación del valor de π que encontramos en *Medida del círculo*[10].

En la segunda parte, sin embargo, las dificultades matemáticas se mezclan con las filológicas. En primer lugar, la expresión «si los toros de pelaje blanco mezclaban su número con los negros, se mantenían continuamente de la misma medida en profundidad y anchura» (*isómetroi eis báthos eis eurós te*, vv. 34-35) puede interpretarse como «formaban un número rectan-

[9] *Vid.* HEATH, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, págs. 440 y ss.

[10] *Vid.* vol. I, *Medida del círculo* 3 (págs. 246-249) y EUTOCIO, *Comentario a la medida del círculo* (págs. 421-434).

gular» (es decir, un número no primo), como lo interpretó Wurm, o, de un modo más exigente, interpretarlo como «formaban un número cuadrado», como lo interpretó Amthor[11]. Según la solución dada por este último autor, una sola de las incógnitas, una vez resuelta, ocuparía más de 82 páginas de 2.500 cifras, y escribir todos los resultados —sólo los resultados— requeriría un volumen de... ¡más de 600 páginas! Heath[12] llama al planteamiento de Amthor «*The complete problem*», pero, a la vez, afirma: «*One may well be excused for doubting whether Archimedes solved the complete problem, having regard to the enormous size of the numbers and the great difficulties inherent in the work*»[13].

Si unimos a esto que Arquímedes en una ocasión envió teoremas con soluciones falsas a sus corresponsales de Alejandría «para que los que andan diciendo que lo descubren todo pero no dan a conocer ninguna demostración queden refutados por haber admitido que han descubierto imposibles»[14], da la sensación de que la posición de Heath está bastante justificada. Pero también se ha de tener en cuenta el siguiente dato filológico: en el epígrafe que precede al *Problema* se emplea el término *exeurón* (lit., «tras haber hallado»). Esta palabra, en principio,

[11] Heath, *The Works of Archimedes*, págs. 320-326, da un resumen de los resultados obtenidos por ambos autores.

[12] *The works of Archimedes*, Dover Publications, Mineola-Nueva York, 2002 (rp. ed. 1897), págs. 324-326.

[13] El peso de la opinión de este gran historiador de la matemática griega es innegable y su influencia es perceptible en algún trabajo más reciente, como el de P. Schreiber («A note on the Cattle Problem of Archimedes», *Historia Mathematica* 20 [1993], 304-306), que sostuvo que el problema es de resolución imposible. Para él, la solución dada por los matemáticos modernos es errónea, pues contradice una condición mencionada en el texto por no haber tenido en cuenta el planteamiento exacto del problema. Parte de sus argumentos filológicos, basados en cierta interpretación de los vv. 7-8, ha sido refutada por C. F. y W. C. Waterhouse, «On the Cattle Problem of Archimedes», *Historia Mathematica* 1995 (22) 2 186-187.

[14] En la carta que precede a *Espirales*, II 2, 24-4, 1.

puede interpretarse como «planteó», o bien como «planteó y resolvió». Arquímedes emplea ese verbo sólo en otra ocasión (*Sobre los conoides y esferoides*, 246, 8-10), y allí significa, sin lugar a dudas, «descubrir la solución». Por eso no debemos descartar que Arquímedes resolviera el problema, independientemente de que le remitiera la solución a Eratóstenes o no. Ciertamente, no es el único caso en que Arquímedes entra en el terreno fangoso del cálculo numérico: ténganse presentes sus aproximaciones de √3 en la *Medida del círculo*, los cálculos que figuran en el *Arenario* y los libros que envió a Zeuxipo sobre los nombres de los números[15]. Aunque éste no es un argumento conclusivo, si a esto le unimos la sorprendente capacidad de relación del personaje y su facilidad para expresar las relaciones matemáticas en cifras sencillas, no es aventurado pensar que Arquímedes tenía el problema resuelto y cabe aún esperar que de la colaboración entre filólogos y matemáticos surjan nuevas aproximaciones a su solución definitiva.

[15] Arquímedes se refiere a ellos en *Arenario*, 3 (II 216, 17-218, 1).

PROBLEMA QUE ARQUÍMEDES DESCUBRIÓ[1] II 528
Y ENVIÓ EN DÍSTICOS, EN UNA CARTA A ERATÓSTENES DE CIRENE, A LOS QUE SE OCUPABAN EN ALEJANDRÍA DE INVESTIGAR ESTOS ASUNTOS

Tras dedicarle tus desvelos, si participas de la sabiduría, haz la cuenta, extranjero, de la cantidad de los bueyes del Sol que pacían en las llanuras de la siciliana isla Trinacia[2] repartidos en cuatro hatos diferentes en pelaje: uno blanco como la leche, reluciente otro de color negro; otro, rubio y otro, a 530
manchas.

En cada hato había pesados toros cuyo número guardaba la siguiente conmensurabilidad: ten presente, extranjero, que los blancos eran iguales a la mitad más la tercera parte de los toros negros más todos los rubios; y que los negros iguales a la cuarta parte más la quinta parte de los de color mezclado, más todos los rubios. Mira con atención que los de color variado restantes eran iguales a la sexta parte más la séptima de los blancuzcos más los rubios todos.

Para las bovinas hembras éste era el caso: las de blanco pelaje eran exactamente iguales a la tercera parte más la cuarta parte del rebaño negro entero; y las negras, a su vez, se igualaban a la cuarta parte más la quinta parte de las de color mez-

[1] *Cf.* la Introducción a este tratado, pág. 350-351.

[2] Aunque la isla Trinacia que menciona Homero es imposible de identificar, el nombre Trinacia pasó, en fechas posteriores, a designar a Sicilia.

clado cuando venían todas al pasto juntamente con los toros. Las de manchas eran de igual número †dividido en cuatro partes†[3] a la quinta parte más la sexta del rebaño de rubios. Las rubias se contaban iguales a la mitad de la tercera parte más la séptima parte del rebaño blanco.

Y tú, extranjero, si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol —por su lado el número de los fuertes toros, por su lado las hembras cuantas había en cada grupo según su color—, no serías llamado ignorante ni inexperto en números.

Pero tampoco, desde luego, te contarían en el número de los sabios. Así que venga, indica todas estas condiciones de los bueyes del Sol: pues si los toros de pelaje blanco mezclaban su número con los negros, se mantenían continuamente de la mis-
532 ma medida en profundidad y anchura[4], y por todas partes los extensos campos llenaban de la superficie de Trinacia. A su vez, si reunidos en un solo grupo los rubios y pintos estaban caprichosamente empezando por uno, completaban como figura un triángulo[5] sin que hubiera que añadir y sin que sobraran toros de otros colores.

Y una vez que hayas descubierto esto y lo hayas reunido en pensamientos y hayas dado, extranjero, las medidas todas de la

[3] Repetidamente se ha sospechado que el término *tetrachêi* del original es una corrupción, pero las enmiendas propuestas hasta ahora no han sido plenamente convincentes.

[4] Los griegos llamaban números cuadrados a aquellos que, si en una figura se representa cada unidad por un punto, tenían forma de cuadrado: son cuadrados perfectos y la tabla de los mismos puede obtenerse de la suma de la serie de los números impares: 1, 4 (= 1 + 3), 8 (=1 + 3 + 5), 16 (1 + 3 + 5 + 7)...

[5] Los números triangulares tenían como característica que, si se representaba cada unidad del número mediante un punto, resultaba una figura de triángulo. La tabla de los números triangulares se obtiene mediante la suma de la serie de los números naturales; así, son triangulares 1, 3 (= 1 + 2), 6 (= 1 + 2 + 3), 10 (= 1 + 2 + 3 + 4), 15 (= 1 + 2 + 3 + 4 + 5)...

multitud, vete jactándote de ser portador de la victoria y sé plenamente tenido por fecundo en esta sabiduría.

ESCOLIO

Mediante el poema Arquímedes mostró claramente el problema: se ha de saber lo que dice, que ha de haber cuatro rebaños de bueyes: uno de toros y vacas de pelaje blanco, de los cuales la cantidad reúne 14 miríadas dobles y 582 simples y 7.360 unidades[6]; otro, igualmente de toros y vacas de color negro, cuyo número es de 9 miríadas dobles y 8.830 sencillas y 800 unidades[7]; otro, de toros y vacas pintos, cuyo número es de 8 miríadas dobles y 6.991 sencillas y 400 unidades[8]. El número de los de pelaje rubio del rebaño restante reúne 7 miríadas dobles y 6.708 sencillas y 8.000 unidades[9]. De modo que el número de los cuatro rebaños reúne 40 miríadas dobles y 3.112 sencillas y 6.560 unidades. 533

Y el rebaño de los toros de pelaje blanco tiene 8 miríadas dobles y 2.931 sencillas y 8.560 unidades, y las vacas 5 miríadas dobles y 7.650 sencillas y 8.800 unidades[10], y el rebaño de los toros de color negro tiene 5 miríadas dobles y 9.684 sencillas y 1.120 unidades, y las hembras 3 miríadas dobles

[6] Lo que el escoliasta llama «miríadas dobles» coincide con lo que Arquímedes llamaba en el *Arenario* «números primeros», es decir, la miríada de miríadas (10^8); por tanto, el rebaño blanco consta de 1.400.000.000 + 5.820.000 + 7.360 = 1.405.827.360 cabezas de ganado (es el 80-múltiplo de la solución de lo que Heath llama el «Problema de Wurm» en *The Works of Archimedes*, págs. 320-323).

[7] El número de reses de color negro es de 900.000.000 + 88.300.000 + 800 = 988.300.800 (también es el 80-múltiplo de la solución de Wurm).

[8] Las reses pintas son 800.000.000 + 69.910.000 + 400 = 869.910.400.

[9] El rebaño rubio, por último, está formado por 700.000.000 + 67.080.000 + 8.000 = 767.088.000 cabezas de ganado.

[10] Respectivamente, 829.318.560 toros blancos y 576.508.800 vacas blancas.

y 9.145 sencillas y 9.680 unidades[11]; el rebaño de los toros de pelaje a manchas tiene 5 miríadas dobles y 8.864 sencillas y 4.800 unidades, y las hembras 2 miríadas dobles y 8.126 sencillas y 5.600 unidades[12]; y el rebaño de los toros de color rubio tiene 3 miríadas dobles y 3.195 sencillas y 960 unidades, y las hembras 4 miríadas dobles y 3.513 sencillas y 7.040 unidades[13].

Y el número de los toros de pelo blanco es igual a la mitad más la tercera parte del número de los toros negros más el rebaño entero de los de color rubio[14]; y el número de los de color negro es igual a la cuarta parte más la quinta parte de los toros a manchas más el número total de los de color rubio[15], y el número de los toros a manchas es igual a un sexto más un sép-
534 timo de los toros de pelaje blanco más el número total de los toros rubios[16].

Y, de nuevo, el número de las vacas blancas es igual a la tercera parte más la cuarta parte del rebaño entero de los negros[17], mientras que el de las negras es igual a la cuarta parte más la quinta parte del rebaño entero de los de manchas[18] y el de las de manchas es igual a un quinto más un sexto del total de los bueyes rubios[19]. De nuevo: el número de las vacas rubias

[11] Es decir, 596.841.120 toros negros y 391.459.680 vacas negras.

[12] Los toros pintos son 588.644.800 y las vacas pintas 281.265.600.

[13] En el rebaño rubio, 331.950.960 toros y 435.137.040 vacas.

[14] Efectivamente, 829.318.560 = 596.841120/2 + 596.841.120/3 + 331.950.960 = 298.420.560 + 198.947.040 + 331.950.960.

[15] Efectivamente, 596.841.120 = 588.644.800/4 + 588.644.800/5 + 331.950.960 = 147.161.200 + 117.728.960 + 331.950.960.

[16] 588.644.800 = 829.318.560/6 + 829.318.560/7 + 331.950.960 = 138.219.760 + 118.474.080 + 331.950.960.

[17] 576.508.800 = 988.300.800/3 + 988.300.800/4 = 329.433.600 + 247.075.200.

[18] 391.459.680 = 869.910.400/4 + 869.910.400/5 = 217.477.600 + 173.982.080.

[19] 281.265.600 = 767.088.000/5 + 767.088.000/6 = 153.417.600 + 127.848.000.

era igual a un sexto más un séptimo del total del rebaño de los bueyes blancos[20].

Y el rebaño de los toros de pelaje blanco sumado al de los toros negros forma un número cuadrado[21] mientras que el rebaño de los toros rubios sumado al rebaño de los de manchas forma un número triangular[22], como exigen las condiciones propuestas para cada color.

[20] 435.137.040 = 1.405.827.360/6 + 1.405.827.360/7 = 234.304.560 + 200.832.480.

[21] 829.318.560 + 596.841.120, que no es un número cuadrado.

[22] 331.950.960 + 588.644.800 = 920.595.760, que no es un número triangular.



FRAGMENTOS

1. Papo, *Collectio* V 34, pág. 352. Éstas son no sólo las cinco figuras recogidas por el divinísimo Platón —es decir, el tetraedro, el hexaedro, el octaedro y el dodecaedro y, el quinto, el icosaedro—, sino también las trece en número descubiertas por Arquímedes, comprendidas por polígonos equiláteros y equiángulos, pero no semejantes entre sí.

El primero es el octaedro comprendido por 4 triángulos y 4 hexágonos.

Después de éste, los tres sólidos de catorce caras, de los cuales el primero está comprendido por 8 triángulos y 6 cuadrados; el segundo, por 6 cuadrados y 8 hexágonos, y el tercero, por 8 triángulos y 6 octógonos.

Después de éstos hay dos de veintiséis caras, de los cuales el primero está comprendido por 8 triángulos y 18 cuadrados y el segundo por 12 cuadrados, 8 hexágonos y 6 octógonos.

Después de éstos hay tres de treinta y dos caras, de los cua- 537
les el primero está comprendido por 20 triángulos y 12 pentágonos, el segundo por 12 pentágonos y 20 hexágonos y el tercero por 20 triángulos y 12 decágonos.

Después de éstos hay uno de treinta y ocho caras, comprendido por 32 triángulos y 6 cuadrados.

Después de éste hay dos de sesenta y dos caras, de los cuales

el primero está comprendido por 20 triángulos y 30 cuadrados y 12 pentágonos y el segundo por 30 cuadrados y 20 hexágonos y 12 decágonos.

Después de éstos hay un último de noventa y dos caras, el cual está comprendido por 80 triángulos y 12 pentágonos.

Cuántos ángulos sólidos tiene cada una de estas 13 figuras poliédricas y cuántas aristas, se estudia del siguiente modo: sencillamente, en cuantos poliedros los ángulos sólidos están comprendidos por tres planos, una vez contados todos los ángulos planos que tienen todas las caras del poliedro, está claro que el número de los ángulos sólidos es la tercera parte del número resultante y en cuantos poliedros el ángulo sólido está comprendido por cuatro planos, una vez contados todos los ángulos planos que tienen las caras del poliedro, la cuarta parte del número resultante es el número de ángulos sólidos del poliedro. De manera semejante, en cuantos poliedros el ángulo sólido está comprendido por 5 ángulos planos, la quinta parte de la cantidad de ángulos planos es el número de la cantidad de los ángulos sólidos.

La cantidad de aristas que tiene cada uno de los poliedros la hallaremos del siguiente modo: una vez contadas todas las aris-
538 tas que tienen los planos que contienen al poliedro, está claro que su número es igual a la cantidad de ángulos planos, pero puesto que cada una de sus aristas es común a dos planos, está claro que las aristas del poliedro son la mitad de esa cantidad.

El primero de los trece poliedros semirregulares[1], puesto que está comprendido por 4 triángulos y 4 hexágonos, tiene 12 ángulos sólidos y 18 aristas, pues de los cuatro triángulos los ángulos son 12 y las aristas 12, mientras que de los 4 hexágonos los ángulos son 24 y las aristas 24; resultando el número total 36, es de necesidad que el número de los ángulos sólidos sea la tercera parte del número antedicho, puesto que también cada uno de sus ángulos sólidos está comprendido por 3 ángulos pla-

[1] Gr. *anomoiogenôn*, literalmente «no homogéneos»; respeto el nombre de «semirregulares» consagrado en castellano para denominar a estos poliedros.

nos, mientras que la cantidad de las aristas es la mitad del número —esto es, de 36—, de modo que son 18 aristas.

El primero de los de catorce caras está comprendido por 8 triángulos y 6 cuadrados, de modo que tiene 12 ángulos sólidos, pues cada uno de sus ángulos está comprendido por cuatro ángulos planos, y tiene 24 aristas; el segundo de los de catorce caras, puesto que está comprendido por 6 cuadrados y 8 hexágonos, tendrá 24 ángulos sólidos, pues cada uno de sus ángulos está comprendido por 3 ángulos planos, y arista tiene 36; ⟨el tercero de los de catorce caras, puesto que está comprendido por 8 triángulos y 6 octógonos, tendrá 24 ángulos sólidos y 36 aristas⟩[2].

El primero de los de veintiséis caras, puesto que está com- 539
prendido por 8 triángulos y 18 cuadrados, tendrá 24 ángulos sólidos y 48 arista; el segundo de los de veintiséis caras, puesto que está comprendido por 12 cuadrados y 8 hexágonos y 6 octógonos, tendrá 48 ángulos sólidos y 72 aristas.

El primero de los de treinta y dos caras, puesto que está comprendido por 20 triángulos y 12 pentágonos, tendrá 30 ángulos sólidos y 60 aristas; el segundo de los de treinta y dos caras, puesto que está comprendido por 12 pentágonos y 20 hexágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 90 aristas; el tercero de los de treinta y dos caras, puesto que está comprendido por 20 triángulos y 12 decágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 90 aristas.

El de treinta y ocho caras, puesto que está comprendido por 32 triángulos y seis cuadrados, tendrá 24 ángulos sólidos y 60 aristas.

El primero de los de sesenta y dos caras, puesto que está comprendido por 20 triángulos y 30 cuadrados y 12 pentágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 120 aristas; el otro de los de

[2] Entre corchetes traducimos la conjetura recogida por Heiberg en su aparato crítico y debida a Hultsch y Eisenmann, que se basaron en el pasaje correspondiente del frg. 2.

sesenta y dos caras, puesto que está comprendido por 30 cuadrados y 20 hexágonos y 12 decágonos, tendrá 120 ángulos sólidos y 180 aristas.

Y el de noventa y dos caras, puesto que está comprendido por 80 triángulos y 12 pentágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 150 aristas[3].

540 **2.** *Scholia Vaticana in Pappum* III, pág. 1.171. α′ El octaedro tiene 4 triángulos y 4 hexágonos, 18 aristas y 12 ángulos sólidos, y cada ángulo sólido está comprendido por tres ángulos planos, de los cuales dos son del hexágono y uno del triángulo, de modo que faltan para los cuatro rectos dos terceras partes de un ángulo recto. Éste se genera a partir de la primera pirámide[4] cortando sus aristas en 3 partes iguales y trazando por los puntos de corte planos que dejen fuera los ángulos.

β′ El de catorce caras[5] está comprendido por 8 triángulos y por 6 cuadrados, tiene 24 aristas y 12 ángulos sólidos y cada ángulo sólido está comprendido por 4 ángulos planos, de los cuales 2 son de cuadrados y dos de triángulos, de modo que para los cuatro rectos faltan dos terceras partes de un ángulo recto. Éste se genera a partir del cubo, partiendo por la mitad sus aristas y trazando por los puntos de corte planos que dejen fuera los ocho ángulos.

γ′ El de catorce caras[6] está comprendido por 6 cuadrados y por 8 hexágonos, tiene 36 aristas y 24 ángulos sólidos y cada ángulo sólido está comprendido por tres ángulos planos, de los cuales dos son de hexágonos y uno de cuadrado. Éste se genera a partir del octaedro, partiendo en tres partes iguales cada una

[3] Para Heiberg todos estos detalles han de ser atribuidos al trabajo de Arquímedes, no al de Papo.

[4] Es decir, «a partir del tetraedro».

[5] Entiéndase «el primero de los de catorce caras».

[6] «El segundo», se entiende.

de sus aristas y trazando por los puntos de corte planos y quedando fuera los 6 ángulos.

δ′ El tercero[7], puesto que está comprendido por 8 triángulos y 6 octógonos, tendrá 24 ángulos sólidos. Cada uno está comprendido por tres ángulos planos, de los cuales dos son de octó- 541
gonos y uno de triángulo; y tiene 36 aristas. Éste resulta del cubo, cortando cada una de sus aristas de manera que resulten tres segmentos de los cuales el de en medio es el doble de cada uno de los de los extremos en potencia[8].

ε′ El de veintiuna caras[9] resulta del de catorce caras comprendido por 8 triángulos y 6 cuadrados, cortando cada una de sus aristas por la mitad y trazando planos por los puntos de corte y...

3. Herón, *Definitiones* 104, pág. 66, 1. Arquímedes afirma que ha descubierto que en total son trece las figuras que pueden inscribirse en la esfera, añadiendo ocho a las cinco mencionadas[10].

Id. pág. 66, 4: de los cuales también Platón conocía el de catorce caras y que era de dos clases, el uno compuesto de ocho triángulos y seis cuadrados, de tierra y aire, como ya sabían algunos de los antiguos, y el otro de ocho cuadrados y 6 triángulos, lo que parece bastante difícil.

[7] «De los de catorce caras», se entiende.

[8] Comparar segmentos en potencia equivale a comparar los cuadrados construidos sobre ellos, es decir, que la arista ha de partirse en los segmentos a, b, c (siendo b el de en medio) de modo que $b^2 = 2a^2 = 2c^2$.

[9] Se refiere al primero de los de veintiuna caras.

[10] Error evidente de Herón el atribuir a Arquímedes el descubrimiento de otros *ocho* poliedros que pueden inscribirse en la esfera; las explicaciones de Papo no dejan lugar a dudas.

542 SOBRE LA MEDIDA DEL CÍRCULO

4. Diófanes 20a[11]. Arquímedes demostró que 30 triángulos equiláteros son iguales a 13 cuadrados[12].

5. Herón, *Metrica* I 37, pág. 86, 22. Arquímedes dejó demostrado en la *Medida del círculo* que todo sector es la mitad del ⟨área⟩ comprendida por el arco del sector y el radio del círculo en el que está el sector[13].

SOBRE PLINTIDIOS Y CILINDROS

6. Herón, *Metrica* I 26, pág. 66, 13. El propio Arquímedes demuestra en *Sobre plintidios*[14] *y cilindros* que el perímetro de todo círculo guarda con el diámetro una razón mayor que la que guarda 211.855 con 67.441, pero menor que la que guarda 197.878 con 62.321[15].

[11] En *Diophantus*, ed. Tannery II, pág. 22 16.

[12] Heiberg lo relaciona con los cálculos para la aproximación a $\sqrt{3}$ en la forma $\sqrt{3} = 26 : 15$.

[13] Encontramos aquí la base documental en la que se asienta la hipótesis —expresada en primer lugar por Tannery— de que la forma en que conocemos el tratado sobre la *Medida del círculo* es una forma abreviada de la que debió de tener el original de Arquímedes.

[14] En su clasificación de los números, Nicómaco de Gerasa llama plintidios (*plinthídes, plinthídia*; literalmente «ladrillos») a los números que resultan de multiplicar un número cuadrado por otro menor (ej., 4 × 4 × 2).

[15] Heiberg entiende que se ha producido una corrupción en la transmisión de los numerales, pues tal y como están ambos dan un valor superior al de π; propone, con argumentos aceptables paleográficamente, corregir la segunda de las cantidades en 67.444 y la tercera en 195.878. Tannery, también con argumentos razonables, había propuesto corregir la primera de las cifras en 211.882 y la tercera en 195.872.

⟨SOBRE LAS SUPERFICIES Y LOS CUERPOS IRREGULARES⟩[16] 543

7. Herón, *Metrica* I 39, pág. 90, 5. Es menester, según creo, hablar en relación con las superficies irregulares, pues es preciso medirlas. Si la superficie es plana y la línea que la comprende es irregular, será preciso tomar algunos puntos contiguos a la propia línea de modo que las líneas rectas que los unan uno tras otro no se aparten mucho de la forma de la línea que los comprende y así medirlo como un polígono, dividiéndolo en triángulos. Pero si la superficie no es plana, sino como una estatua de forma humana u otra cosa semejante, es preciso tomar papiro lo más fino posible o un lienzo y extenderlo alrededor por partes sobre su superficie hasta que quede envuelto y luego, desplegando el papiro o el lienzo sobre un plano, medirlo como ⟨superficie⟩ comprendida por una línea irregular como se ha dicho antes, y mostrar lo que ocupa la superficie. Y si hay otras superficies o formas de superficies, se medirán según lo antedicho.

Herón, *Metrica* II 1, pág. 92, 3. Tras la medición de las superficies rectilíneas y no rectilíneas, en lo que sigue hemos de ir a los cuerpos sólidos, cuyas superficies medimos en el libro anterior a éste, tanto las planas como las esféricas como las cónicas y cilíndricas, y además de éstas, las irregulares, cuya invención, dado que es sorprendente, algunos la atribuyen a Arquímedes, refiriéndolo de acuerdo con la tradición. Pero venga de Arquímedes o de algún otro, es necesario describir también éstas.

8. Herón, *Metrica* II 20, pág. 138, 6. Una vez medidos los 544
cuerpos sólidos regulares, suponemos que es razonable tratar de pasada la medición de los irregulares, como los que tienen forma de raíz o de piedra, pues algunos cuentan que Arquímedes ideó

[16] El título no procede de los testimonios en griego, sino que ha sido introducido por Heiberg.

un método para tales asuntos. Pues si lo que se ha de medir es fácil de transportar, será necesario, tras construir una cisterna de ángulos rectos por todas partes capaz de contener lo que queremos medir, llenarla de agua e introducir dentro el cuerpo irregular. Está claro que el agua se verterá en una cantidad igual de grande que el volumen del cuerpo introducido en el agua, y que una vez sacado de nuevo el cuerpo fuera de la cisterna será lo que falte. Entonces, si medimos el espacio que se ha vaciado, mostraremos que el volumen del cuerpo introducido era de ese tamaño. Pero también es posible medirlo de otro modo: si al cuerpo irregular se le aplica cera o barro de modo que quede cubierto y en ángulo recto por todas partes y, tras medir eso retiramos el barro y formando un cuerpo en ángulos rectos lo medimos y lo restamos del medido previamente, mostraremos que lo que queda es el volumen del cuerpo. El método de aplicar algo alrededor ha de usarse con los cuerpos que no pueden ser transportados[17].

APÉNDICE A SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO, LIBRO II

9. *Sobre la esfera y el cilindro* II 4, pág. 192, 5. De cada una de estas cuestiones se darán al final el análisis y la síntesis[18].

545
A ZEUXIPO

10. *Arenario* I 3, pág. 216, 17... de los números a los que he dado nombre y que he dado a conocer en los libros que dediqué a Zeuxipo...

[17] Los términos en que se expresa Herón evidencian que los métodos expuestos se le atribuían a Arquímedes sólo por tradición histórica.

[18] Estas demostraciones ya en el siglo II a. C. no figuraban en su lugar en las ediciones vulgares; Eutocio las halló y las incluyó con sus propias palabras en su *Comentario*. *Cf.* vol. I, Introducción, pág. 81 y 391-404.

Arenario III 2-4, pág. 216, 17. Pero supongo que también es útil que hable sobre la denominación de los números —entre otras cosas, para que no se pierdan los que no han tenido acceso al libro que dediqué a Zeuxipo por no haberse dicho de antemano en este libro nada sobre esa cuestión.

MECÁNICA

11. Herón, *Mechanica* I 24, pág. 62, 22. Nadie negará que sólo en los sólidos se habla de peso e inclinación. En las figuras
geométricas sólidas y planas, cuando decimos que un punto es 546
el centro de inclinación y gravedad, eso lo aclaró Arquímedes suficientemente. Por esa causa se debe también saber lo que ahora vamos a exponer. Posidonio, un estoico, definió con precisión el centro de gravedad e inclinación y dijo: el centro de gravedad o inclinación es un punto tal que, cuando el peso es colgado de ese punto, queda dividido en dos partes iguales. Por eso Arquímedes y sus adeptos en Mecánica especificaron y precisaron una diferencia entre el punto de suspensión y el centro de gravedad. En lo que concierne al punto de suspensión, éste es un punto en el sólido o no sólido que cuando se suspende de él el objeto que se ha de suspender, sus partes se encuentran en equilibrio —con eso quiero decir que no oscila y no se inclina—. Porque el equilibrio se produce cuando un objeto es igual a otros en peso, como es el caso en las balanzas, cuando están suspendidas paralelas al plano del horizonte o a uno de los planos paralelos al mismo. Así, Arquímedes dice: Los pesos se equilibran respecto a una línea o a un punto. El peso se equilibrará respecto a una línea cuando el peso esté sobre dos puntos de una línea de modo que la línea no se incline y el plano trazado por esa línea perpendicular al horizonte permanezca perpendicular, como quiera que la línea sea desplazada. Cuando decimos «el peso se inclina», nos referimos sólo a su desplazamiento hacia abajo, es decir, a su movimiento hacia la

Tierra. En lo que concierne al equilibrio en un punto, se produce cuando el peso es colgado de él y las partes del cuerpo, en
547 cada movimiento que hace, permanecen en armonía mutua. Un peso mantiene el equilibrio con otro cuando ambos están suspendidos de dos puntos de una línea, dividida en dos mitades y en el punto de corte de esa línea, y esa línea está paralela al horizonte, puesto que las magnitudes de los pesos guardan una con otra la razón inversa de las magnitudes de sus distancias a sus respectivos puntos de suspensión. Que de esta manera los pesos suspendidos guardan el equilibrio uno con otro en la inclinación lo demostró Arquímedes en sus escritos *Sobre el equilibrio de las figuras*, en los que entran en aplicación las palancas.

Cf. Papo VIII 5 (pág. 1.030, 11). Y decimos que el centro de gravedad de cada cuerpo es un punto situado dentro de él, colgado del cual idealmente el peso suspendido deja de moverse y conserva la posición del principio sin volcarse en su suspensión. Este punto se halla no sólo en los cuerpos regulares, sino también en los de formas irregulares, y el modo de hallarlo es el siguiente...[19]

Id. VIII 8, pág. 1.034, 1. Lo que mejor resume la materia relativa a los centros de gravedad sería esto, pero aprenderías lo elemental, que está explicado por este medio, si encontraras los libros de Arquímedes *Sobre los equilibrios*.

Simplicio, *In Aristotelis de caelo*, pág. 543, 24. Lo relativo
548 a los centros de gravedad, sobre lo cual Arquímedes y otros muchos han escrito mucho y muy ameno, tiene por objetivo cómo hallar el centro de gravedad de un objeto dado, es decir, un punto en el cuerpo que si se ata de él una cuerdecita el cuerpo estará en el aire sin inclinarse.

[19] Tras ese inciso, continúa la explicación en el pasaje siguiente.

12. Arquímedes, *Cuadratura de la parábola* 6, pág. 274, 12. Pues todo objeto colgado permanece en el punto en que está colgado de modo que el punto de suspensión y el centro de gravedad del objeto colgado estén en perpendicular —pues esto también se ha demostrado.

13. Arquímedes, *Sobre los cuerpos flotantes* II 2, pág. 350, 13. Pues se ha demostrado en los *Equilibrios* que el centro de gravedad de todo segmento de paraboloide se encuentra en su eje, dividido de tal manera que el segmento del eje que está hacia el vértice sea el doble que el segmento restante.

14. Papo VIII 24, pág. 1.068, 19. Que los círculos mayores prevalecen sobre los círculos menores cuando su movimiento de rotación se produce en torno al mismo centro estaba demostrado en el *Sobre las balanzas* de Arquímedes y las *Mecánicas* de Filón y Herón.

15. Papo VIII 19, pág. 1.060, 2. Mover un peso dado con la fuerza dada pertenece a la misma rama de estudios; se dice que esto fue un descubrimiento mecánico de Arquímedes, en relación con el cual se cuenta que dijo: «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo».

16. Herón, *Mechanica* I 25, pág. 70, 4. Es muy necesario 549
ofrecer algunas aclaraciones sobre el peso, el transporte y el traslado con respecto a la cantidad, como corresponde a una introducción. Pues Arquímedes ya introdujo un método seguro sobre este aspecto en el libro suyo que lleva el título *Sobre los apoyos*. De ello pasaremos por alto lo que necesitamos para otras cosas y utilizaremos lo que se refiere a la cantidad, como corresponde a quienes estudian la cuestión. El punto de vista general es el siguiente: averiguaremos cuánto peso recae sobre cada columna cuando uno tiene muchas columnas a discreción y quiere poner sobre ellas riostras o un muro y precisamente en

el mismo o distinto lugar de las de los extremos, de modo que se eleve por encima de una de ellas o por encima de las dos por igual y cuando la distancia entre las columnas es igual o distinta.

CATÓPTRICA

17. Teón, *Comentario al* Almagesto *de Ptolomeo* I, pág. 10, ed. Basil. Y los rayos que desde ella[20] recaen sobre el aire, al sufrir la refracción y formar un ángulo mayor que el que tiene su vértice en el ojo, como lo afirma también Arquímedes demostrándolo en los libros sobre *Catóptrica*, que también las cosas sumergidas en el agua parecen más grandes, y que cuanto más abajo van, más grandes ⟨parecen⟩...

... y refráctense como ⟨los ángulos⟩ EΘA, EKB, como indica Arquímedes en los libros sobre *Catóptrica*; como decíamos.

550 **18.** Olimpiodoro, *Comentario a los* Meteorológicos *de Aristóteles*, pág. 211, 18, ed. Busse. Y especialmente Arquímedes demuestra eso mismo, que el rayo visual se refracta, mediante el anillo sumergido en una vasija.

Pseudo-Euclides, *Catóptrica*, postulado 6. Si se deposita algo en un vaso y se toma una distancia tal que ya no se vea, estando a la misma distancia, si se vierte agua se verá el objeto depositado.

19. Escolio a Pseudo-Euclides, *Catóptrica*, pág. 348, 17. Arquímedes dice así: El ángulo Z es igual al E o menor o mayor. Sea primero mayor Z que E; entonces el E es menor. Supóngase de nuevo que Δ es el ojo y desde el ojo de nuevo refléjese ⟨el rayo visual⟩ hacia el objeto visto B. Entonces el ángulo E será mayor que el Z. Y era menor. Lo cual es imposible[21].

[20] «Ella» se refiere a «la vista»; Teón, como Ptolomeo, sigue la más difundida de las teorías antiguas sobre la visión, la que sostiene que ésta se produce cuando los rayos que parten del ojo van a dar en los objetos vistos.

20. Apuleyo, *Apología* 16. A los cuales[22] les es necesario otro razonamiento aparte del que acabo de mencionar: por qué al mirar en los espejos planos se ven las cosas casi igual y como retratos; en los hinchados y esféricos todo más pequeño y, al contrario, en los cóncavos, más grande; cuándo y por qué lo de la izquierda se intercambia con lo de la derecha; cuándo en el mismo espejo una imagen se esconde al fondo, cuándo se muestra fuera; por qué los espejos cóncavos, si se mantienen frente al sol, encienden la yesca que se pone cerca; qué produce que cuando el arco iris se muestra variadamente entre las nubes se vean dos soles de aspecto parejo y, aparte, otros muchos fenó- 551
menos del mismo jaez, cosas que trata Arquímedes de Siracusa en un volumen ingente.

21. Pseudo-Psello, *Synops. mathem.*, pág. 73, ed. Xylandri. Es posible también, sobre todo a falta de dioptra, usar un método, como efectivamente lo hizo Arquímedes, que, cuando unos le preguntaron cuál sería la magnitud de la pirámide que estaba a la vista, clavando rápidamente en el suelo el bastón derecho junto a la sombra de la pirámide que producía el sol, razonó que las sombras tenían en un extremo, de modo semejante, el bastón y la pirámide, y construyó a continuación dos triángulos equiángulos: la razón que guarda con el propio bastón la sombra producida en el suelo por el bastón es la misma que guarda con la propia pirámide la sombra producida en el suelo por la pirámide; y a renglón seguido, mediante la medición de la sombra de la pirámide indicó la altura de la pirámide a los que le preguntaban.

[21] Por el mismo razonamiento vemos que tampoco Z es mayor que E; luego es igual.

[22] Se refiere a los filósofos.

SOBRE CONSTRUCCIÓN DE ESFERAS

22. Carpo según Papo VIII 3 (pág. 1.026, 9). Carpo de Antioquía afirma en un pasaje que Arquímedes de Siracusa compuso un solo libro de materia mecánica[23], el de *Sobre la construcción de esferas*, pero no consideró oportuno componer tratados sobre nada de lo demás.

552 *Cf.* Proclo, *In Euclid.* (pág. 41, 16). La construcción de esferas a imitación de los giros celestes, tal y como Arquímedes se ocupó de ella.

Cf. Hipólito, *Refutat. omn. haeres.* (ed. Duncker, pág. 66, 52). Y la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el círculo de la Luna Aristarco de Samos escribe que son....[24], mientras que Arquímedes que son 554 miríadas de estadios y 4.130 unidades[25] y desde el círculo lunar hasta el círculo del Sol 5.026 miríadas de estadios y 2.065 unidades; desde éste hasta el círculo de Venus 2.027 miríadas de estadios y 2.065 unidades, y desde éste hasta el círculo de Mercurio 5.081 miríadas y 7.165 unidades y desde éste hasta el círculo Empíreo 4.054 estadios y 1.108 unidades, y desde éste hasta el círculo de Júpiter 2.027
553 miríadas de estadios y 5.065 unidades, y desde éste hasta el círculo de Saturno 4.037 miríadas de estadios y 2.065 unidades, y desde éste hasta el círculo del Zodíaco y la última órbita 2.008 miríadas de estadios y 40.005 unidades[26]. Arquímedes expone las distancias mutuas entre los círculos y las profundidades de las

[23] *Cf.* Papo, VIII 2 (pág. 1.026, 2): «Llaman mecánicos también a los que saben construir esferas mediante las cuales se representa una imagen del cielo mediante un movimiento de agua uniforme y en circuito cerrado».

[24] Heiberg omite el pasaje relativo a Aristarco.

[25] Para la longitud del estadio, *cf. Arenario* 220, 10 y n. 7.

[26] La lectura ,με (40.005) es dudosa, según el propio Heiberg; Duncker propuso la conjetura ,βε (2.005).

esferas, y el perímetro del Zodíaco ocupa 4 números segundos[27] de estadios y 4.731 miríadas; de modo que ocurre que la recta que va del centro de la Tierra hasta la superficie de la última[28] será un sexto del número dicho[29] y el que va de la superficie de la Tierra sobre la que caminamos hasta el Zodíaco, un sexto del recién mencionado, restando del número cuatro miríadas de estadios que van desde el centro de la Tierra hasta su superficie. Desde el círculo de Saturno hasta la Tierra afirma que la distancia en estadios es de dos unidades de números segundos y 2.269 miríadas y 2.711 unidades, y del círculo de Júpiter hasta la Tierra en estadios dos unidades de números segundos y 277 miríadas y 646 unidades, y desde el empíreo hasta la Tierra una unidad de números segundos y 3.241 miríadas y 8.581 unidades y desde el Sol hasta la Tierra una unidad de números segundos y 2.160 miríadas y 4.454 unidades, y desde el Resplandeciente[30] hasta la Tierra 5.268 miríadas y 8.259 unidades, y desde Venus hasta la Tierra 5.081 miríadas y 5.170... Así da Arquímedes las distancias y profundidades de las esferas... y los números expuestos por Arquímedes y las razones expresadas por los demás respecto a las distancias, si no están en razones acordes[31] —es 554
decir, en las ⟨razones⟩ dobles y triples indicadas por Platón— sino halladas fuera de esos acordes, no se podría mantener que el conjunto está construido en armonía... porque es fácil darse cuenta de que los restantes números indicados por Arquímedes[32] sobre las distancias entre los planetas no están en razones acordes, reflexionando qué relación mutua guardan y en qué razones están[33].

[27] Para los números segundos, *cf. Arenario* 236, 28 y n. 21.

[28] «De la última esfera», se entiende.

[29] Tomando $\pi = 3$.

[30] *I. e.* «Mercurio».

[31] Es decir, «en razones de las que se pueda derivar una armonía musical».

[32] A excepción del de la Luna.

[33] Heiberg trae a colación el pasaje de Macrobio, *Comentario al «Sueño de Escipión» de Cicerón*, II 3: «Arquímedes creyó, en efecto, haber descubierto el

SOBRE LA DURACIÓN DEL AÑO

Hiparco en Ptolomeo, *Almagesto* III 1 (pág. 124, 93). A partir de estas observaciones está claro que las diferencias entre los años son en cualquier caso pequeñas, pero sobre los solsticios espero que tanto nosotros como Arquímedes no hayamos errado en la observación y en el cálculo en la cuarta parte de un día.

Cf. Amiano Marcelino XXVI 1, 8. Que la duración del giro del año es ésa lo afirman los antiguos expertos en el movimiento del mundo y de las estrellas, entre los cuales destacan Metón y Euctemón e Hiparco y Arquímedes, cuando el Sol, por la ley eterna de las cosas sublimes, recorrido el cielo de los signos[34], al que la lengua griega llama Zodíaco, en trescientos sesenta y cinco días medidos con sus noches vuelve al mismo punto solsticial.

número de estadios que dista la Luna de la superficie de la tierra y Mercurio de la Luna, Venus de Mercurio, el Sol de Venus, Marte del Sol, Júpiter de Marte, Saturno de Júpiter; pero desde la órbita de Saturno hasta el propio cielo en que se desplazan las estrellas consideró que había medido todo el espacio mediante sus cálculos. Sin embargo, la mensuración de Arquímedes fue rechazada por los platónicos por no respetar los intervalos dobles y triples».

[34] Es decir, «el círculo de las estrellas fijas».

ÍNDICE DE NOMBRES

SOBRE LAS LÍNEAS ESPIRALES

ARENARIO

CUADRATURA DE LA PARÁBOLA

SOBRE LOS CUERPOS FLOTANTES

STOMACHION

MÉTODO

LIBRO DE LOS LEMAS

PROBLEMA DE LOS BUEYES

FRAGMENTOS

ÍNDICE GENERAL

Este segundo volumen de *Tratados* de ARQUÍMEDES,
traducido por PALOMA ORTIZ GARCÍA
y revisado por M.ª LUISA PUERTAS CASTAÑOS,
se ha compuesto en Times, con 10,25 puntos sobre 12,75 de interlineado,
en los talleres de Víctor Igual,
y se ha impreso en Madrid en abril de 2009.